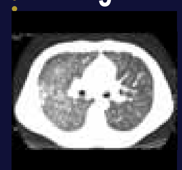
Q.e.d.

Ciencias duras en palabras blandas

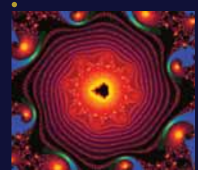
Noviembre 2011
Año 4 | N°5
ISSN: 1852-5091

όπερ έδει δεῖξαι

De π a la tomografía

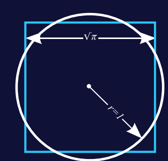


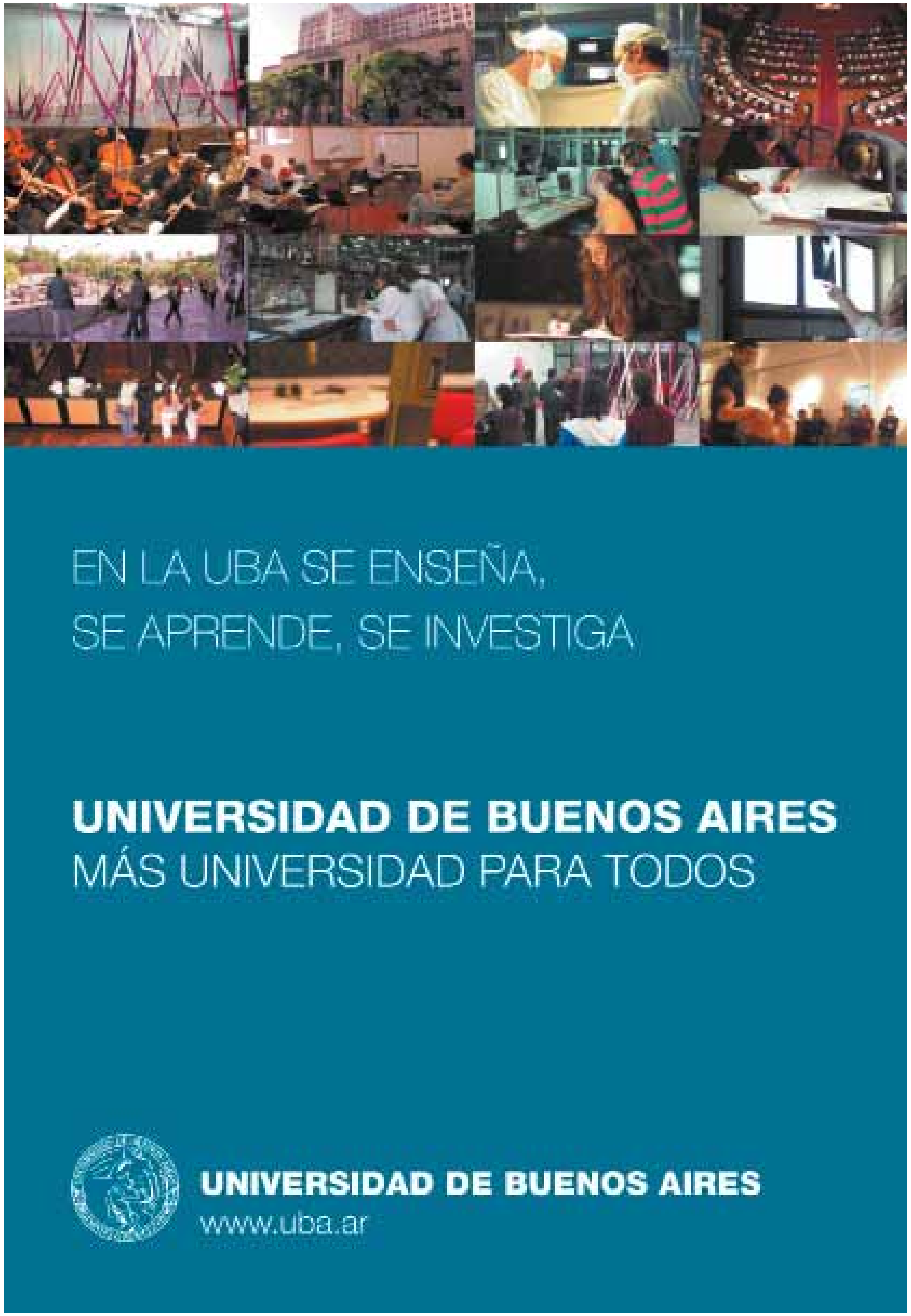
Geometría fractal



Luis Santaló

- Suma de cuadrados
- Curiosidades físicas
- Lógica matemática
- Problemas matemáticos
- Demostraciones visuales





Editorial

Al maestro, Luis Santaló

La siguiente anécdota se le atribuye a Jorge Luis Borges: en 1975, fallece su madre, Leonor Acevedo, a los 99 años de edad. En el velorio una señora le da el pésame a Borges y comenta: "Peeero… pobre Leonorcita, morirse tan poquito antes de cumplir 100 años. Si hubiera esperado un poquito más…" Borges le dice: "Veo, señora, que es usted devota del sistema decimal"

Más allá del humor e inteligencia singulares de Borges, aquí estamos, homenajeando a un gran maestro, al cumplirse 10 años de su fallecimiento y 100 años de su nacimiento. Alabado el sistema decimal que nos permite este honor y placer.

Nos referimos a Luis Antonio Santaló Sors, nacido en Gerona, España, el 9 de octubre de 1911 y fallecido en Buenos Aires el 23 de Noviembre de 2001.

Además de ser uno de los matemáticos argentinos más importantes del siglo pasado, fundador de una importante rama de la matemática como es la Geometría Integral, desarrolló una singular tarea docente en las aulas de las Universidades de Buenos Aires, Rosario y La Plata, dejando su marca personal en la escuela matemática argentina.

Como decía su entrañable amigo, Manuel Balanzat, además de la palabra y el pizarrón, Santaló hacía uso de sus manos, las que en el aire dibujaban curvas y superficies y sugerían sus propiedades, incluso trabajando en espacios de dimensión mayor que tres.

Santaló fue además de todo, un gran divulgador de la ciencia y un hombre preocupado por la enseñanza de la matemática y el apoyo a jóvenes talentos.

Decía al respecto: "Cuando se habla de los recursos de un país hay uno, por lo general escaso, que no es costumbre mencionar: los talentos matemáticos. Todo niño capta lo esencial de nuestra ciencia, pero solo algunos, naturalmente dotados, llegarán a destacarse o intentar una labor creativa. Sabemos que se manifiestan a muy temprana edad y si no se los educa se malogran luego; es deber de la escuela descubrirlos y guiarlos; es obligación de la sociedad el ofrecerles oportunidad para su desarrollo. El resto de los ciudadanos, sin esa capacidad o esa vocación especiales, debe, sin embargo, aprender toda la matemática necesaria para entender el mundo que vivimos. Desconocer el lenguaje a que aspiran las ciencias y usan las técnicas es encerrarse en una manera de analfabetismo que un país civilizado no puede tolerar. Aquí el precio de la incuria es la dependencia, la pérdida de la soberanía".

Su pensamiento, sigue vivo entre nosotros. Salud maestro.

Juan Carlos Pedraza

Staff

Q.e.d.
Ciencias duras en palabras blandas©

Revista trimestral de divulgación
Año 4, número 5

Universidad de Buenos Aires
Ciclo Básico Común (CBC)
Departamento de Ciencias Exactas
Pabellón 3, Ciudad Universitaria, Buenos Aires, Argentina

Directores:
Agustín Rela
Juan Carlos Pedraza

Editor:
Carlos Borches

Redacción:
Iliana Pisarro

Diseño:
Pablo Gabriel González

Consejo editorial:
Cecilia Di Risio
Flora Gutiérrez
Jorge Ferronato
Patricia Fauring
Silvia Reich

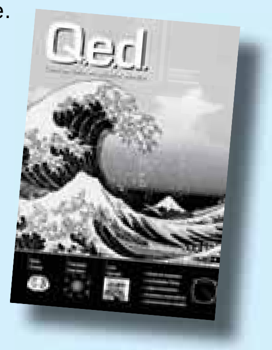
Agradecemos la colaboración de
Alexia Yavícoli
Christian Espíndola
Juan Medina
Mario Bunge
Ricardo Cabrera
Ursula Molter

Impresa en La Copia

revistaqed@cbc.uba.ar
http://www.slideshare.net/revistaqed

Revista Q.e.d.

+54 11 4789-6000, interno 6083
+54 11 4781-0706
ISSN 1852-5091



Q.e.d. Ciencias duras en palabras blandas

Artículos

Secciones

Q.e.d., ***Quod erat demonstrandum,*** *es una expresión latina que significa:*

lo que se quería demostrar

Tiene su origen en la frase griega ὅπερ ἔδει δεῖξαι (óper édei deíjai), que usaron muchos matemáticos, entre ellos Euclides y Arquímedes, para señalar que habían alcanzado la demostración que buscaban.

Por Ursula Molter
FCEN - UBA

Cómo la matemática puede ayudar a detectar tumores

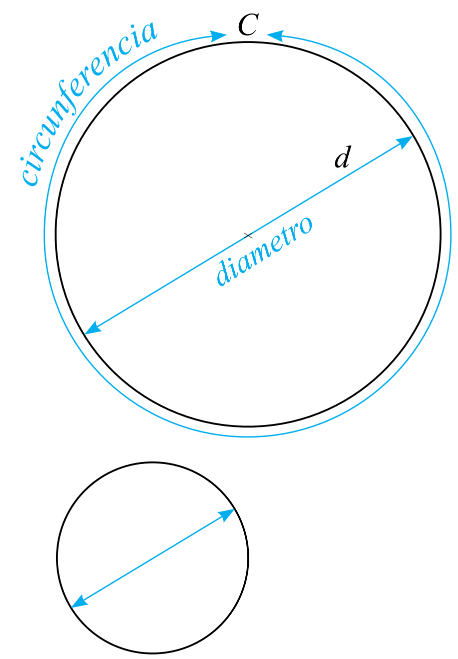
Gente que parece ociosa arroja una aguja al aire en un típico juego de azar del siglo XVIII. Pero el afán de ganar de algunos pone en marcha al pensamiento matemático y de aquel antiguo juego llegamos unos siglos después a la tomografía. Los caminos de la creación matemática son insondables…

¿Cuál es la relación entre el perímetro C y el diámetro d de una círculo? Analicemos dos círculos de diferente tamaño.

Como el más grande se obtiene al multiplicar todos los puntos del más pequeño por 2, observamos que:

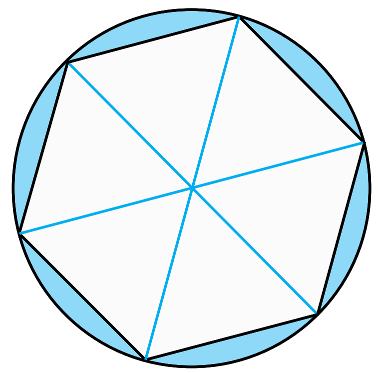
$$\frac{C}{d} = \text{constante}$$

¡Siempre vale lo mismo para cualquier circulo! Ese número se llama π - del griego $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ que significa periferia o circunferencia.

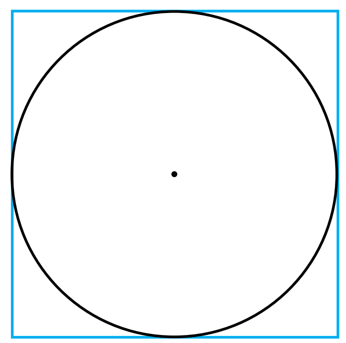


¿CUÁNTO VALE π ?

Observando a simple vista las circunferencias, vemos que π es mucho mas grande que 2. En realidad nos convencemos bastante rápido también que es más grande que 3 pero más chico que 4.

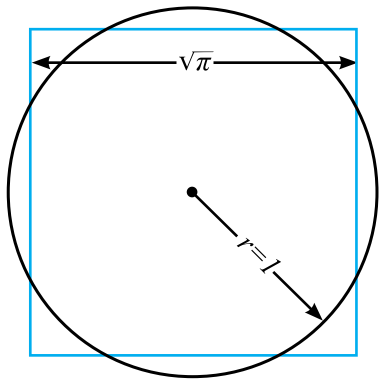


$3 < \pi$



$\pi < 4$

La búsqueda del valor de π comienza hace más de 4000 años. Cuenta la historia, que los antiguos egipcios y babilónicos comenzaron a calcular el valor exacto de π dibujando un inmenso círculo en la arena y luego simplemente utilizaron una cuerda para hallar la relación entre el perímetro y el diámetro. Pudieron establecer que π era levemente más grande que 3. Empíricamente obtuvieron el valor π = 3,125.



El cículo de radio 1 tiene área igual a π. Luego el cuadrado de área π debe tener un lado de longitud $\sqrt{\pi}$.

El motivo de buscar el valor de π, se origina en el problema de cuadrar el círculo, que es el problema de construir con regla y compás (en un número finito de pasos) un cuadrado de igual área que el círculo de radio 1.

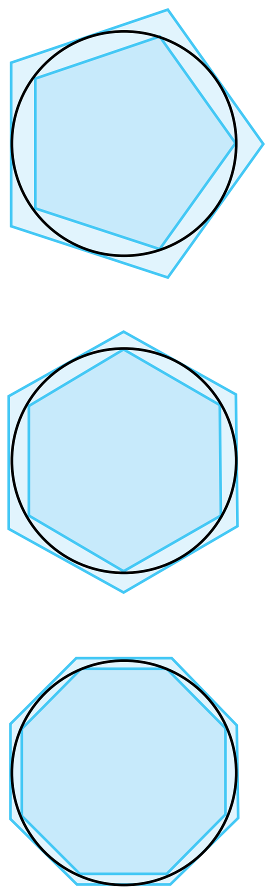
Es decir, se necesitaría poder construir $\sqrt{\pi}$. Se pueden construir algunas raíces como $\sqrt{2}$, por ejemplo, ahora se quiere ver si podemos "construir" $\sqrt{\pi}$.

En 1650 antes de Cristo, - en un famoso papiro egipcio se le dio a π el valor

$$\pi = 3{,}16.$$

Sin embargo, tanto en el antiguo testamento (1 Reyes 7:23) como los chinos, utilizaron el valor de $\pi = 3$.

Fue Arquímedes (287 - 212 AC) quien hizo un estudio riguroso del cálculo del valor de π utilizando polígonos inscriptos y circunscriptos con lados cada vez más pequeños.



Arquímedes prueba que

$$3 \cdot \frac{10}{71} < \pi < 3 \cdot \frac{10}{70}$$

$$\pi \sim 3.1416$$

A fin del siglo XVI Francois Viéte, abogado francés y excelente matemático utilizó el mismo método que Arquímedes para *ensandwichar* π entre 2 valores muy cercanos:

$$3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$$

Tablilla babilónica que los expertos interpretan como el cálculo de una raíz cuadrada. Esta pieza pertenece a un conjunto comprado en 1912 por la Universidad de Yale.

Ferdinand von Lindemann (1852-1939) cerró un problema que durante dos milenios mantuvo a profesionales y aficionados a la matemática muy ocupados: la cuadratura del círculo.
Si un número se puede construir con regla y compás debe ser raíz de un polinomio no nulo con coeficientes racionales de grado no mayor que dos. Cuando Lindermann demostró que π es trascendente, se concluyó de inmediato que no se podía construir con regla y compás un cuadrado de igual área que un círculo dado.

En 1761 Johann Friedrich Lambert probó que π es irracional: o sea, no existen dos enteros p y q tales que π se escriba como p/q. ¡Esto ya implica que los dígitos de π nunca serán periódicos!

Pero todavía no nos ayuda en el problema de la cuadratura del círculo, porque por ejemplo $\sqrt{2}$ también es irracional pero se puede construir. Para descartar la construcción utilizando regla y compás, se necesitaba probar que π es trascendente.

Un número irracional es trascendente, si no es raiz de ningun polinomio con coeficientes racionales - o sea, es seguro que no se puede construir con regla y compás.

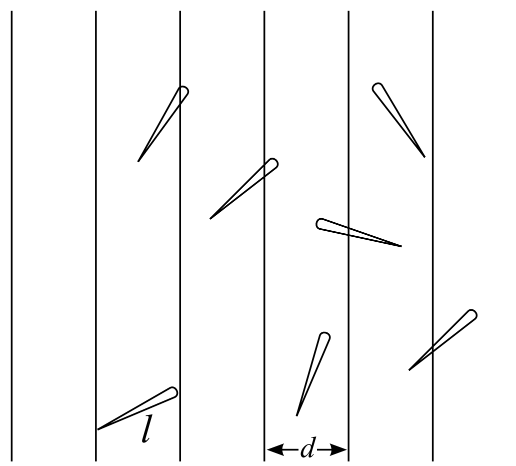
Recién en 1882 que Ferdinand von Lindemann pudo demostrar que π es trascendental, logrando así concluir la búsqueda de la construcción de un cuadrado de igual área que el círculo!

Sin embargo, hallar métodos para el cálculo de π siguió siendo un entretenimiento favorito para matemáticos y laicos.

EL PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON.

En su ensayo *Las secciones indiscretas* [San89], Santaló nos describe el problema de la aguja de Buffon de la siguiente manera:

"Consideremos un plano (que puede ser el piso o una mesa grande) dividido por rectas paralelas a una distancia d. Sobre el plano, se tira al azar una aguja (segmento de recta) de longitud l, no mayor que d. La pregunta que se plantea Buffon en 1733 es: ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja corte alguna de las rectas paralelas?"



Fue el mismo Buffon quien en 1777 resolvió el problema y demostró que la probabilidad de que alguna recta paralela sea cortada por la aguja es:

$$p = \frac{2\ell}{\pi d}$$

Para demostrarla es necesario calcular la medida de las posiciones en que la aguja corta alguna paralela (casos favorables) y dividirla por la de todas las posiciones de la aguja en el plano (casos posibles). Nuevamente apareció π en escena: Si la aguja es de longitud exactamente $d/2$, entonces la probabilidad de que la aguja corte alguna recta es $1/\pi$.

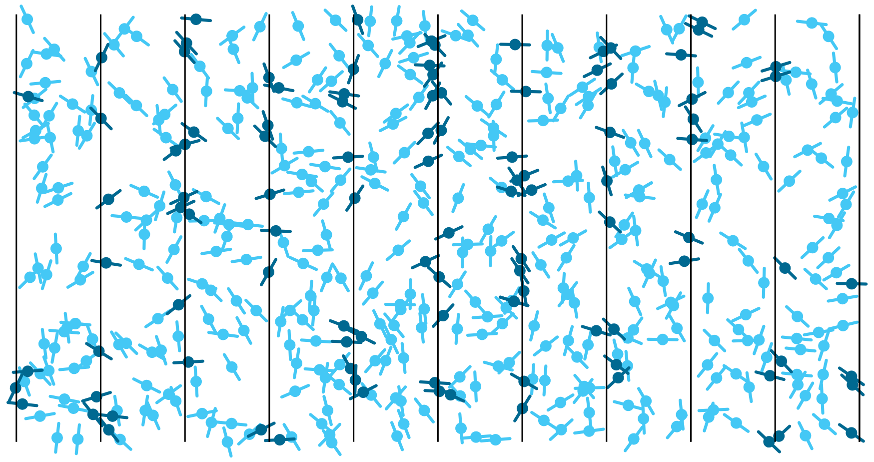
El grabado describe el descubrimiento de la tumba perdida de Arquímedes.
Poco más de un siglo después de la muerte de Arquímedes, Marco Tulio Cicerón escuchó historias acerca de la tumba perdida y decidió buscarla. La encontró cerca de la puerta de Agrigento, en Siracusa, y señaló que sobre ella se había colocado una esfera inscripta dentro de un cilindro.

Autoreferencial:

Otros artículos de Q.e.d. donde se abordan cuestiones conectadas con los temas de este artículo:

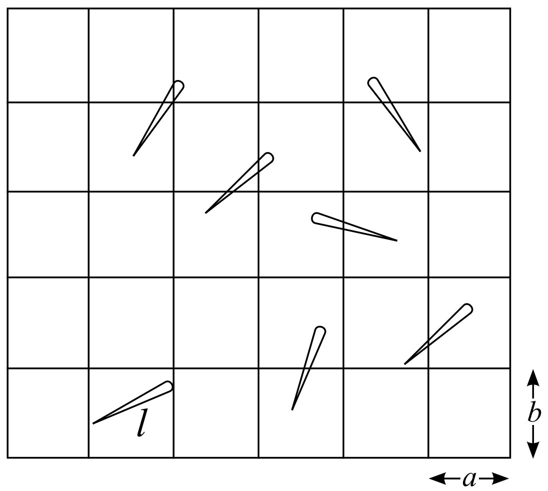
La física y las imágenes médicas, Jorge Cornejo. Revista Q.e.d. nro 2.

Hubo varios intentos de estimar π realizando el experimento muuuuchas veces - y obviamente no es una manera práctica para estimar el valor de π - pero sí nos da una intuición sobre su valor.



Esta figura muestra el resultado de tirar la aguja 500 veces. Los resultados positivos son las agujas oscuras, los negativos son las claras.

Pierre Simon Laplace (1749-1827), en su monumental Teoría analítica de las probabilidades [Lap1812], generalizó el “problema de la aguja de Buffon” de la siguiente manera: Consideremos el plano dividido en rectángulos de lados a, b; se tira al azar sobre éste una aguja de longitud ℓ, no mayor que el menor de los lados a, b.



El problema de la aguja de Buffon generalizado por Laplace

En este caso, la probabilidad de que la aguja corte alguno de los lados de la red de rectángulos es:

$$p = \frac{2\ell(a+b) - \ell^2}{\pi ab}$$

Si en lugar de una aguja de longitud ℓ fuera lanzada al azar sobre el plano una curva cualquiera de longitud L, la esperanza matemática, o valor medio, del número N de puntos en que la curva corta los lados de la red de rectángulos será:

$$E(N) = \frac{2L(a+b)}{\pi ab}$$

Si se toma, por ejemplo, una red de cuadrados a = b = 10 cm y se arroja al azar sobre la misma una curva de longitud L = 20cm, tendremos:

$$E(N) = \frac{8}{\pi} = 2,54$$

Si en cualquiera de las experiencias anteriores fuera calculada experimentalmente la probabilidad p o determinado el valor medio E(N) -a través de un número considerable de experiencias-, las fórmulas permitirán calcular cualquier elemento del segundo miembro (por ejemplo, la longitud L de la curva utilizada).

Así, en 1812, Laplace observó que “sería posible hacer uso del cálculo de probabilidades para rectificar curvas o cuadrar superficies, pero sin duda los geómetras jamás utilizarán este medio”.

LA ESTEREOLOGIA O CÓMO RECONSTRUIR EL TODO A PARTIR DEL CONOCIMIENTO DE INTERSECCIONES.

Como cuenta Santaló en el artículo citado, “Laplace se equivocó. Un siglo y medio después, estas fórmulas pasaron a ser frecuentemente aplicadas para medir longitudes de curvas sobre preparaciones microscópicas.”

Para poder utilizar estas fórmulas, es necesario medir posiciones de la aguja en el plano, o de la curva. Quizá sea uno de los aspectos más notorios de la matemática: desde su orígen se ocupa de medir conjuntos de puntos, pero aquí hace falta medir otros objetos geométricos: conjunto de rectas, planos, conjuntos de curvas congruentes entre sí, etc.

De estas medidas que fueron estudiadas por Crofton en 1869 y retomadas y generalizadas por Blaschke en 1936, nació la geometría integral (nombre que le diera Blaschke en su seminario de la Universidad de Hamburgo en 1936, seminario del que participó, entre otros el Dr. Santaló).

Y fue el mismo Santaló que introdujo la medida sobre conjuntos convexos, estableciendo la famosa “fórmula fundamental cinemática en el plano” que dice:

“La medida de todos los convexos K (móviles) que intersecan a uno fijo K_0 es igual a: $2\pi(F_0 + F) + L_0 L$”

De hecho, Luis Santaló es considerado como uno de los “socios fundadores” de esta especialidad matemática. Su libro *Integral Geometry and Geometric Probability* [San76], es considerado el “clásico fundamental” para cualquiera que quiera realizar investigación relacionada con el tema.

En esta nota nos ocuparemos sólo de un aspecto de estas medidas, que ha probado ser útil para estimar tamaños de tumores dentro de órganos; la estereología.

Cuenta Santaló que en 1961, en una reunión de especialistas en diferentes ramas de la ciencia (biología, anatomía, botánica, mineralogía, metalurgia, etc.) realizada en Feldberg (Selva Negra, Alemania) se fundó la Sociedad Internacional de Estereología.

Su primer presidente, Hans Elias, profesor de la Universidad de Chicago, definió la estereología como:

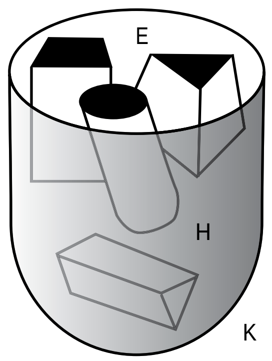
> *“conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o de proyecciones sobre el plano; es decir, se trata de una extrapolación del plano al espacio”.*

Miraremos algunos ejemplos clásicos de la estereología, seleccionados por el mismo Santaló.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue una de las grandes figuras de la ciencia en tiempos de la Revolución Francesa. Se ocupó detenidamente de la teoría de probabilidades motivado por distintos juegos, aunque señaló: “Es, sobretodo, en el juego, donde un gran cúmulo de ilusiones mantiene la esperanza y la sostiene incluso contra las probabilidades desfavorables. La mayoría de los que juegan a la lotería no saben cuántas probabilidades tienen a su favor y cuántas le son contrarias. A todos les espantaría, de llegar a conocerlo, el gran número de apuestas que se pierden; sin embargo, se tiene buen cuidado en dar una gran publicidad a las ganancias”.

Las modernas técnicas empleadas para la obtención de imágenes médicas sintetizan el trabajo de matemáticos, físicos, médicos e ingenieros.

Supongamos un cuerpo K del espacio, que contiene en su interior distintas partículas H distríbuidas al azar, de diferentes formas y tamaños. Si se corta K con un plano E, la intersección será una sección plana en la cual las partículas H determinan ciertas áreas.

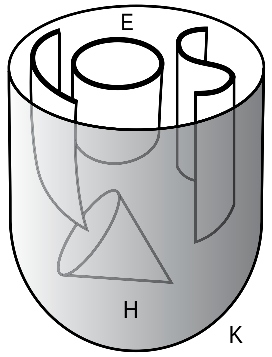


Un cuerpo en cuyo interior se encuentran sólidos menores

Imaginemos que K sea un órgano animal (hígado, riñón, cerebro) y H fibras o cavidades de éste órgano cuyo tamaño se requiere determinar a partir de la sección con planos de prueba E. El problema más sencíllo consiste en averiguar la proporción del volumen de partículas H dentro de K, a partir de la proporción de las áreas de las secciones de H y K por el plano E.

Experimentalmente se puede medir la proporción A_A de las áreas en el plano E. Suponiendo que el cuerpo sea cortado por un plano al azar, con una ley de probabilidades proporcional al área de su intersección con K, la geometría integral demuestra que la esperanza matemática de A_A es igual a V_V, la proporción entre los volúmenes de las partículas o cavidades H y el volumen del cuerpo K. Es decir que A_A es un estimador (insesgado) de V_V.

Supongamos ahora que el cuerpo K contenga en su interior ciertas láminas H de cualquier forma y de área total A_H. Se desea calcular el área de las superficies H por unidad de volumen de K. Para ello se puede cortar K con un plano o una recta. Si cortamos K con un plano E, la intersección de E con H será un conjunto de curvas, cuya longitud puede ser medida.



Un cuerpo en cuyo interior se encuentran láminas de diferentes formas

La esperanza matemática del cociente entre la longitud de estas curvas planas y el área de la sección de E con K es: $4/\pi \times A_H/V_K$.

Es decir que el cociente A_H/V_K (cantidad de área por unidad de volumen K) puede ser obtenido multiplicando por $4/\pi$ la proporción entre la longitud de las curvas de la intersección de E con H, por unidad de área de la intersección de E con K.

El cociente A_H/V_K también puede ser obtenido cortando el cuerpo K con una recta G y comparando el número de puntos de intersección entre G y las superficies H con la longitud de la cuerda que G determina en K (número de puntos por unidad de longitud).

LA TOMOGRAFÍA COMPUTADA

De manera análoga -pero mucho más complicado- se desarrolla la Tomografía computada. El término: tomografía se deriva del griego: *tomos* (corte o sección) y *graphein* (escribir).

El problema matemático es el siguiente: Supongamos (como antes) que tenemos un cuerpo convexo K dentro del cual hay una masa de densidad variable dada por la función $f(x; y; z)$, o sea cambia para cada punto de coordenadas $(x; y; z)$. Si atravesamos K con una radiación (por ej. rayos X, láser) y medimos su intensidad de entrada y salida, la diferencia entre estas intensidades será la absorción del rayo por la materia en el interior de K y dependerá de la recta G, por donde el rayo se propaga. Por consiguiente, es posible medir experimentalmente esta función de G que llamaremos F(G).

Pero, ¿cómo determinamos $f(x; y; z)$ a partir de F(G), que se supone conocida para todas las rectas que atraviesan K? El primero que consideró este problema fue J. Radon (1887-1956). En 1917, este matemático alemán encontró una fórmula para calcular $f(x; y; z)$ a partir de F(G), conocida como "transformada de Radon".

Cabe ahora la pregunta: es posible conocer F(G) para todas las rectas G? Obviamente en la práctica no! Pero en 1963, el físico A.M. Cormack pudo probar que alcanza con un número finito de mediciones! En 1971, se construyó el primer tomógrafo que media 160 secciones, y 180 rectas en cada sección, y cada medición duraba aproximadamente 5 minutos. Las imágenes de estas mediciones, tardaban en procesarse aproximadamente 2,5 horas!

Más adelante, un ingeniero, G.N. Hounsfeld logró perfeccionar los dispositivos de Cormack y comenzó la etapa comercial de la tomografía computada.

La gran ventaja de utilizar la tomografía computada, es que no se necesita agredir el organismo del paciente. Cormack y Hounsfield recibieron por sus investigaciones el premio Nobel de Medicina en 1979. Según Santaló, "De haber vivido, ciertamente Radon hubiera participado de este premio", que habrían así compartido un matemático, un físico y un ingeniero. Un excelente ejemplo de colaboración científica.

Concluyo esta nota citando una vez más al maestro: "La estereología y la tomografía computada ilustran bien el proceso de las diferentes etapas en el avance de la ciencia. Originalmente los estudios son motivados por la simple curiosidad de conocer o por encontrar soluciones a los problemas surgidos en actividades extracientíficas (la "pasión" de Buffon por los juegos de azar es un buen ejemplo). Luego, estos resultados obtenidos se revelan aplicables a la solución de problemas prácticos presentados por la técnica: ésta es la etapa de las "aplicaciones" de la ciencia. Posteriormente tales aplicaciones vuelven a presentar problemas de carácter teórico que suscitan nuevamente el interés de los científicos puros, dando origen muchas veces a otros estudios y a teorías exclusivamente especulativas. Así, a través del progreso alternado entre ciencia y técnica, el hombre consigue ampliar paulatinamente su horizonte de conocimientos."

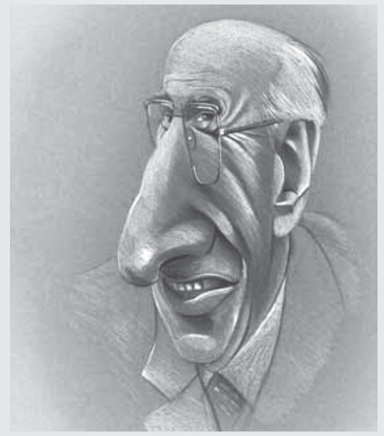
Referencias

[Lap1812] P. S. Laplace Théorie analytique des probabilités. Paris: Veuve Courcier, 1812.

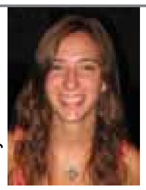
[San55] L. A. Santaló, On the distribution of sizes of particles contained in a body given the distribution in its sections or projections, Trabajos Estadist. 6 (1955), 181–196.

[San76] Luis A. Santaló, Integral geometry and geometric probability, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976, With a foreword by Mark Kac, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 1.

[San89] L. A. Santaló, Las secciones indiscretas, Ciencia Hoy. 1(2), Febrero/Marzo 1989.



"La estereología y la tomografía computada ilustran bien el proceso de las diferentes etapas en el avance de la ciencia. Originalmente los estudios son motivados por la simple curiosidad de conocer o por encontrar soluciones a los problemas surgidos en actividades extracientíficas (la "pasión" de Buffon por los juegos de azar es un buen ejemplo). Luego, estos resultados obtenidos se revelan aplicables a la solución de problemas prácticos presentados por la técnica: ésta es la etapa de las aplicaciones de la ciencia." Luis Santaló


Alexia Yavícoli
FCEyN - UBA


Juan Miguel Medina
IAM - CONICET

De tanto en tanto aparecen ideas tan poderosas que no sólo modifican el futuro sino también el pasado. Surge una clave distinta para relatar la historia, donde la nueva idea aparece naturalmente mucho antes de ser concebida.

La geometría de la naturaleza

Tal es el caso de los fractales, un concepto acuñado por Mandelbrot en 1967 que, una vez reconocido por su valor en el universo matemático, invitó a explorar un territorio poblado por una serie de extraños objetos geométricos fuera del paraíso de las curvas y superficies suaves. Historias dispersas que comenzaron durante el siglo XIX, transformadas en un relato coherente cuando pudo ser contado en clave fractal.

¿Cómo describirías la forma de un copo de nieve? Difícil, ¿no? Muchas veces los objetos de la naturaleza que nos rodean no se asemejan a las formas "simples" conocidas de la geometría clásica (tales como círculos, triángulos, cuadrados, conos, esferas) con las que el ser humano acostumbra a abstraer las figuras de los objetos.

Un primer ejemplo de esto, fue citado por el matemático polaco Benoît Mandelbrot alrededor de 1967, cuando observó en una de sus publicaciones que las curvas geográficas (el ejemplo que él utilizó fue el de las costas de Gran Bretaña) son tan complicadas en su detalle que generalmente tienen longitud infinita (más adelante daremos un ejemplo de una curva acotada de longitud infinita).

El problema radicaba en que los matemáticos, hasta ese momento, no podían describir este hecho con las herramientas de la geometría clásica. En dicho artículo B.M. nos muestra que la medición de una linea geográfica real, depende de la escala mínima utilizada para medirla. Esto se debe a que los detalles cada vez más finos, de dicha linea geográfica, se aprecian al usar una regla de medir mas pequeña.

Otro ejemplo que se encuentra en la naturaleza y que no se puede describir con la geometría clásica son las hojas de ciertas plantas, como el helecho.

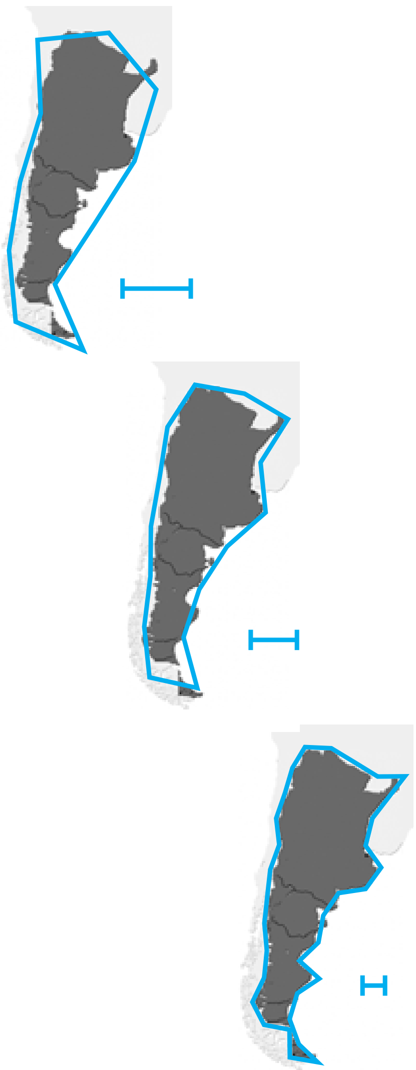
En la imagen se observa que las formas de las partes se asemejan al todo. Es decir, si miramos esta imagen a otra escala de observación (hacemos 'zoom') obtenemos una imagen similar con el mismo grado de detalle. A esta propiedad se la llama autosimilaridad.

En la naturaleza abundan casos de autosimilaridad, como el romanescu, un peculiar brócoli de forma fractal.

Por la necesidad de querer describir estas formas, surgió una nueva rama de la geometría: la geometría fractal.

Si bien no hay una definición formal de lo que es un fractal, trataremos dentro de lo posible de precisar este concepto. A un fractal se le suelen atribuir alguna de las siguientes características:

- Es muy irregular para ser descripto en términos geométricos tradicionales.
- Tiene detalles a cualquier escala de observación.
- Es autosimilar.



¿Cuanto mide la frontera argentina? Podemos medirla aproximadamente fijando un segmento y recorriendo la frontera. El valor aproximado será la longitud del segmento por la cantidad de segmentos. ¿Qué sucede si achicamos indefinidamente la longitud del segmento? Si la frontera fuese una curva "suave", nos acercaríamos al valor exacto de la extensión de la frontera, pero en caso de una frontera sumamente irregular, esta aproximación crecerá indefinidamente.

En los últimos 40 años, la geometría fractal, cobró gran relevancia, debido a su gran aplicabilidad en diversos problemas como por ejemplo: compresión de datos, compresión de imágenes digitales, sismología, porosidad de materiales, descripción de formas biológicas (disposición de glándulas, redes neuronales, red vascular, etc.), creación de fondos y paisajes para efectos especiales de cine o composición armónica y rítmica de melodías.

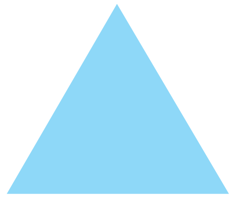
Para fijar ideas sobre la apariencia y modo de construcción de los fractales, veamos algunas construcciones elementales.

Benoit Mandelbrot (1924-2010) matemático nacido en Polonia y formado en Francia. Trabajó sobre el concepto de fractal difundiendo su posibles aplicaciones. Según Mandelbrot, la geometría fractal permitirá una comprensión más profunda de los elementos de la naturaleza: "las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta" Mandelbrot, (Introduction to The Fractal Geometry of Nature).

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Una forma de construír fractales, es comenzando con una figura sencilla básica, por ejemplo un triángulo cuya área es igual a uno, a la cual se le irá extrayendo de manera apropiada copias de de esta figura a una menor escala.

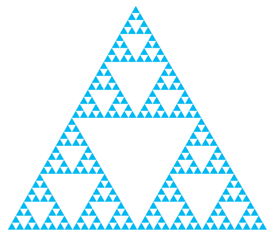
Paso 1: comencemos con un triángulo equilátero de área 1.

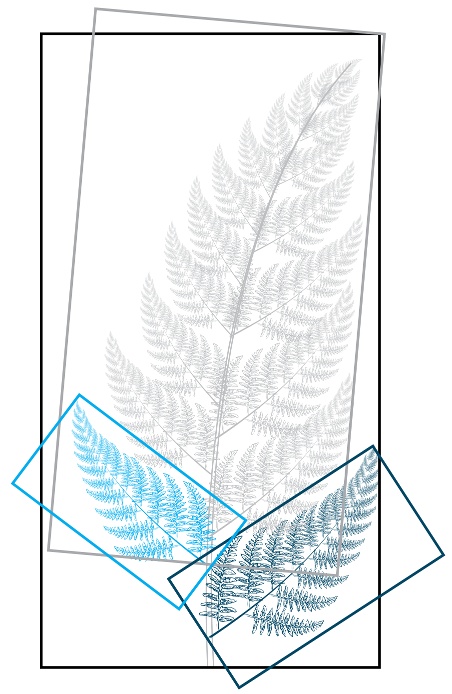


Paso 2: extraemos un triángulo con vértices en el punto medio de los lados del triángulo del paso 1. Así quedan 3 triángulos de área ¼.

Paso 3: de cada uno de los tres triángulos del paso 2 , extraemos de manera similar al paso 2, un triángulo de cada uno de ellos. Quedando 9 triángulos de área 1/16.

Y se repite este procedimiento infinitas veces... La figura obtenida después de iterar infinitas veces se denomina "Triángulo de Sierpinski".





Las hojas de un helecho son un ejemplo de objetos de la naturaleza con apariencia fractal. Cada una de las partes pequeñas es similar a la hoja completa.

El romanescu, un híbrido entre el brócoli y la coliflor, es usualmente mencionado como un ejemplo de objeto fractal. Recientemente, Sang-Hoon Kim, del Institute for Condensed Matter Theory, Chonnam National University en Corea, se ocupó de las dimensiones fractales del romanescu

En general, en el paso k-ésimo tenemos 3^{k-1} triángulos de área $4^{-(k-1)}$.

Veamos qué pasa con el área total de la figura obtenida: Observemos que el área del triángulo de Sierpinski se obtiene calculando el área para una figura en el paso k, la cual es $3^{k-1}4^{-k+1}$ y luego haciendo tender k a infinito, o sea el área del triángulo de Sierpinski es $\lim_{k\to\infty} 3^{k-1}4^{-k+1} = 0.$

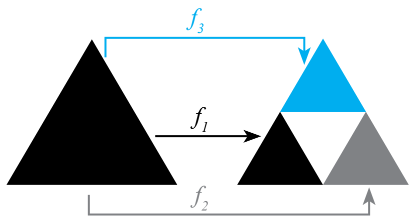
Otra forma de describir este mismo tipo de construcción es aplicando, a un triángulo de lado uno, cada una de las siguientes transformaciones del plano:

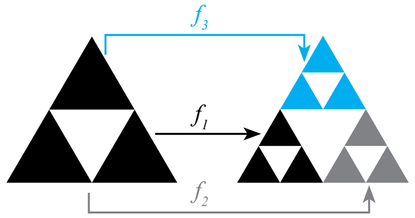
$$f_1(x,y) := \left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right); \qquad f_2(x,y) := \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\frac{y}{2}\right);$$

$$f_3(x,y) := \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4},\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

O sea si Δ es el triangulo inicial, el primer paso es la unión de los tres triángulos más pequeños $\Delta_1 = f_1(\Delta)$, $\Delta_2 = f_2(\Delta)$ y $\Delta_3 = f_3(\Delta)$

Luego se repite este procedimiento infinitas veces de la siguiente manera:





En este ejemplo, es fácil ver que, solamente teniendo dichas tres transformaciones y una figura inicial (cuatro datos) construimos una figura "complicada en su detalle". Este es un ejemplo sencillo de una técnica que se suele utilizar en compresión de imágenes.

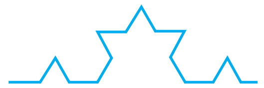
Waclaw Franciszek Sierpinski (1882-1969) matemático polaco de notables contribuciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. Fue el autor de 724 trabajos y 50 libros, a un ritmo de trabajo que no interrumpió a pesar de atravesar con su país dos guerras mundiales y la guerra polaco-soviética. También estudió astronomía y filosofía.

CURVA DE VON KOCH

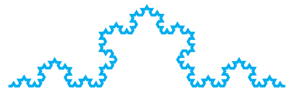
Paso 1: tomamos el segmento unitario [0,1]

Paso 2: lo dividimos en 3 partes iguales, removemos la del medio y colocamos 2 segmentos de igual longitud como indica la figura

Paso 3: En cada segmento del 2do. Paso repetimos el procedimiento anterior.



Y se repite este procedimiento infinitas veces...



Observemos, que en el k-ésimo paso tenemos 4^k segmentos de longitud 3^{-k}.

La figura obtenida al iterar este procedimiento infinitas veces, se la llama curva de Koch.

Se puede ver que la longitud de dicha curva es infinita pues, en el paso k tenemos una curva de longitud igual 4^k3^{-k}, pero esta expresión es tan grande como uno quiera conforme aumente el valor de k, es decir, tiende a infinito.

Utilizando técnicas más sofisticadas, pueden construirse fractales más elaborados.

Finalmente, con las construcciones expuestas anteriormente, estamos en condiciones de dar un modelo sencillo de un copo de nieve: El borde de dicha figura se obtiene pegando tres copias de la curva de von Koch por cada uno de sus extremos, como indica la figura.

Además, como vimos que la curva de von Koch es autosimilar y tiene longitud infinita, entonces resulta que el borde de la figura del copo de nieve tiene longitud infinita y es autosimilar.

En este caso vemos que la geometría fractal nos ayudó a modelar un objeto natural, que sólo con la geometría usual nos hubiese sido imposible hacerlo.

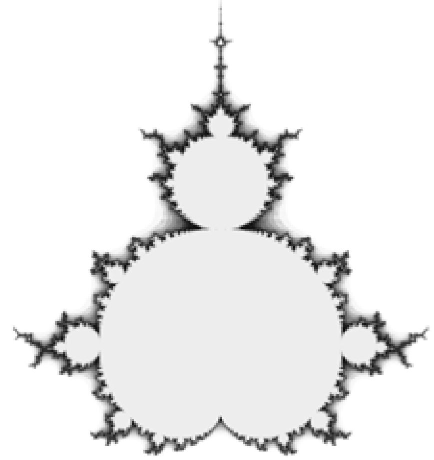
¿Cómo podemos medir cuán complejo (o rugoso) puede ser un fractal? ¿Cómo podemos comparar dos fractales distintos?

Nos gustaría utilizar algún criterio para distinguir clases de fractales. Nos apoyaremos en una noción que generaliza un concepto intuitivo: el concepto de dimensión.

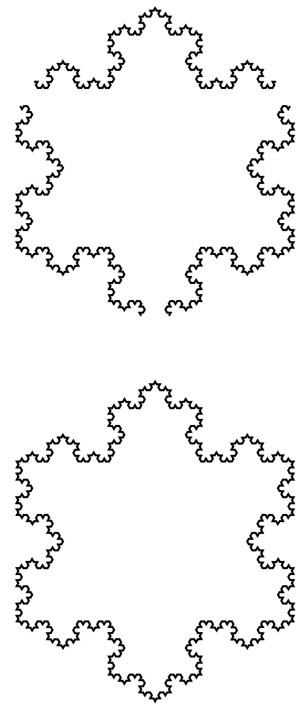
Uno tendería a pensar que los segmentos o curvas "buenas" tienen dimensión 1, que un cuadrado o una sábana tienen dimensión 2, un cubo tiene dimensión 3, y así siguiendo...

En el caso de un segmento de longitud L, para cada $r>0$ podemos cubrir el segmento con una cantidad $N(r):= L/r$ (o en caso de que no sea un natural, tomando el natural siguiente) de segmentitos de lado r. Así se verifica que para valores pequeños de r, $N(r).r \sim Cte$, y que en particular tomando logaritmo se tiene $ln(N(r))+ln(r) \sim ln(Cte)$, y por lo tanto $(ln(Cte)-ln(N(r)))/ln(r)$ cuando r es chico se aproxima a 1 (que es lo que intuitivamente se esperaría que fuera la dimensión del segmento.

Veamos que sucede algo parecido en el caso de cuadrado de lado L. Para cada r>0 podemos cubrir el cuadrado con una cantidad $N(r):= L^2/r^2$ o en caso de que no sea un natural, tomando el natural siguiente) de cuadraditos de lado r. Así se verifica que para valores pequeños de r, $N(r).r^2 \sim Cte$, y que en particular tomando logaritmo se tiene $ln(N(r))+2.ln(r) \sim ln(Cte)$, y por lo tanto $(ln(Cte)-ln(N(r)))/ln(r)$ cuando r es chico se aproxima a 2 que es lo que intuitivamente se esperaría que fuera la dimensión del cuadrado.



El conjunto de Mandelbrot, es un ejemplo de un fractal más complicado, que puede obtenerse estudiando el comportamiento de la iteración del valor 0 en los polinomios cuadráticos $p_c(x)=x^2+c$, donde c es un número complejo. Fijando un valor de c, se itera $p_c(x)$ en x=0 analizando el comportamiento de la sucesión. Para un conjunto de valores c, la iteración resulta ser divergente en módulo. La frontera del conjunto de valores c que hacen divergente la iteración de $p_c(0)$ es el conjunto de Mandelbrot



Un modelo sencillo de un copo de nieve obtenido pegando tres copias de la curva de von Koch por cada uno de sus extremos.

Muchos artistas plásticos incorporaron en sus obras ideas inspiradas en conceptos fractales. Tal es el caso de Tom Beddard en su Butterfly dance (Una muestra del autor se puede consultar en http://www.fastcodesign.com/1663070/tom-beddard-grows-fractals-into-works-of-art)

Basándonos en estos ejemplos definiremos el concepto de dimensión fractal, como

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{-ln(N(r))}{\ln(r)}$$

donde despreciamos el $ln(Cte)$ ya que no modifica dicho límite, y $N(r)$:=cantidad mínima de cubitos de lado r necesarios para cubrir el conjunto.

En la actualidad hay muchas definiciones alternativas de dimensión fractal, que si bien no coinciden siempre, sí lo hacen en muchos casos con la definición dada anteriormente (como sucede en los ejemplos dados).

Calculemos las dimensiones fractales de los ejemplos dados anteriormente:

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Por la forma como construimos el Triángulo de Sierpinski, partiendo de área 1, cada triangulito del paso n tiene lado

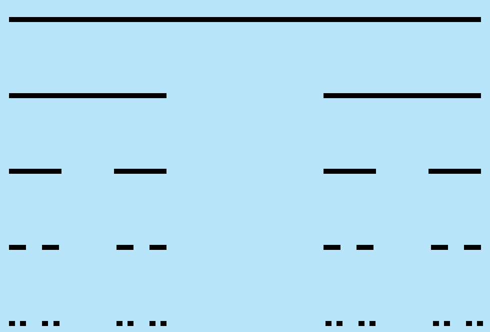
$$\frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}.2^{-n+1}$$

El Sierpinski está contenido en cada paso de su construcción, con lo cual no es difícil ver que se puede cubrir (mirando el paso $n+1$) con una cantidad mínima de 3^n cuadrados de lado $(2/(3^{1/4}))\ .\ 2^{-n+1}$.

Problema fractal

Ejercicio para el lector interesado: Calcule la dimensión fractal del conjunto que se construye a partir de un segmento de medida uno, extrayendo de cada intervalo del paso anterior un intervalo centrado de razón $1-r$ con respecto al del paso anterior $(0<1-r<1/2)$.

Por ejemplo, si $r=2/3$ la construcción del conjunto será:



La solución debiera darle: $ln(2)/ln(2/r)$

Así resulta ser que la dimensión del Sierpinski es

$$D := \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3^n)}{\ln(\frac{2}{3^{\frac14}}.2^{-n+1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\ln(3)}{\ln\frac{2}{3^{\frac14}} + (-n+1)\ln(2)} =$$

$$= \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

CURVA DE VON KOCH

Dado un n natural, podemos cubrir la Curva de Koch con una cantidad mínima de 4^n cuadraditos de lado $(1/3)^n$. Así, tenemos que su dimensión fractal es:

$$D := \lim_{n\to\infty} -\frac{\ln(4^n)}{\ln((\frac13)^n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{n\ln(4)}{-n\ln(3)} =$$

$$= \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$$

La dimensión fractal, nos da una idea de cuan complejo es el conjunto, y cuanto rellena el espacio.

En los ejemplos anteriores vemos que el Triángulo de Sierpinski rellena más el plano que la Curva de Koch (ya que $ln(3)/ln(2)$ es mayor que $ln(4)/ln(3)$), aunque vale aclarar que ambos tienen área nula.

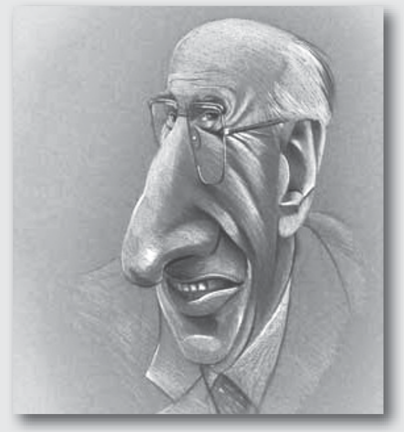
Otro ejemplo:

La Esponja de Menger tiene dimensión fractal $ln(20)/ln(3) \sim 2{,}76683$...

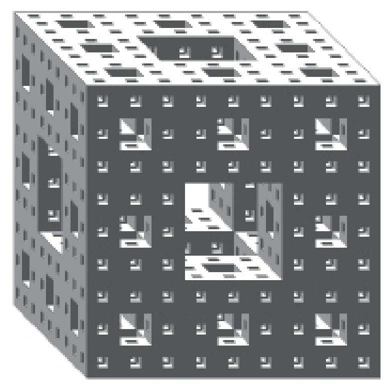
Mientras que el Tetraedro de Sierpinski (se sugiere verlo en Google) tiene una dimensión fractal $ln(5)/ln(2) \sim 2{,}3219$...

Y gráficamente se puede ver que el Tetraedro de Sierpinski está más ahuecado, mientras que la esponja de Menger rellena más el espacio.

También hay otra construcción similar al Tetraedro de Sierpinski, pero con base triangular, en cuyo caso tiene dimensión fractal 2. Así notamos que un pequeño cambio en la construcción de dicho fractal, hizo una diferencia sustancial en la dimensión.



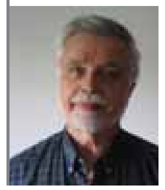
"El mayor descubrimiento geométrico del siglo XX son los fractales. Estos objetos proponen nuevos problemas a los matemáticos y prometen ser muy útiles por sus aplicaciones." Luis Santaló



La esponja de Menger es un conjunto fractal descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger mientras exploraba el concepto de dimensión topológica. Es una superficie compacta de volumen cero.
Karl Menger (1902-1985) se ocupó de ella en sus primeros trabajos, cuando se discutía una nueva noción de dimensión.

Suma de cuadrados

Mario A. Bunge
CBC - UBA



Tablilla babilónica conocida como Plimton 322. Los arqueólogos encontraron en las tablillas problemas relacionados con números cuadrados. La pieza, que actualmente se encuentra en el museo de la Universidad de Columbia (EEUU), data del siglo XVII A.C.

En Q.e.d tenemos debilidad por los números. Los sumamos, multiplicamos les ponemos distintos nombres y nos ponemos muy contentos cuando encontramos expresiones que nos dicen cuánto valen sus sumas, de las finitas y de las interminables…

Si bien se desconoce el origen del problema, no son pocos los que ubican en la matemática babilónica al problema de sumar los primeros cuadrados.

La situación aparece si queremos formar, por ejemplo, una pirámide de base cuadrada con una cierta cantidad de naranjas. Es decir: formamos la base con un cuadrado de, por ejemplo, cien naranjas (diez filas de diez naranjas) en el piso de arriba, debidamente intercaladas, podemos montar una estructura estable de 9x9 naranjas y asi seguimos subiendo. Si las naranjas nos alcanzaron, la anteúltima fila tedría cuatro naranjas, (2x2) y en el extremo una sola.

Puede ser que la cantidad hubiese sido suficiente y la pirámide habría llegado a su fin sin problemas o que en medio de la construcción hayamos advertido que habíamos exagerado con las dimensiones de la base debiendo empezar todo de nuevo.

Por esa razón, si disponemos de una expresión que nos diga a priori cuantas naranjas nos demanda una pirámide de base n^2 podemos precisar las máximas dimensiones de la pirámide.

LA FÓRMULA PARA LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES OBTENIDA VISUALMENTE

Probar por inducción completa la validez de

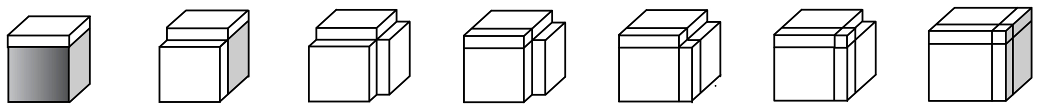
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

no parece ayudarnos a comprender cómo llegar a conjeturar esta relación.

Intentamos acá una aproximación geométrica.

Obteniendo el cubo de lado $x+h$ a partir del cubo de lado x

De un cubo de lado x pasaremos a un cubo de lado $x+h$,conforme al procedimiento que sugieren las figuras, y que detallamos más abajo.

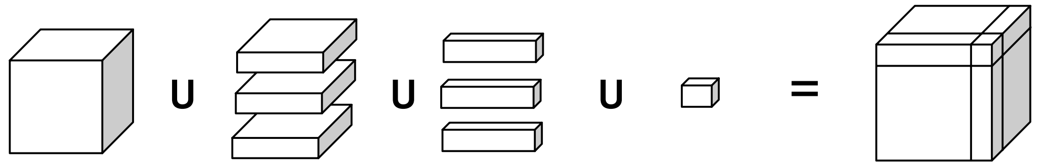


(*) En Q.e.d. Nro 1 abordamos ciertas sumas interminables (pág 24), en Q.e.d. Nro 2 una demostración visual de las sumas de los primeros impares (retiro contratapa) y en Q.e.d. Nro 4 con los números poligonales

Tomamos tres rebanadas de sección cuadrada x x x y espesor h pegándolas sobre el cubo tal como se ve en la figura. Hecho esto, quedan a la vista tres "dientes". Rellenamos los dientes con tres lingotes de largo x y sec ción h x h.

En el encuentro de los tres lingotes queda todavía un vacío, que debemos rellenar con un pequeño cubo de lado h. De esta manera arribamos al nuevo cubo, ahora de lado $x + h$.

Así, el cubo de lado $x + h$ se obtiene del cubo de lado x adosándole la cubierta consistente en esas tres rebanadas, más los tres lingotes, más el cubito.



EL VOLUMEN DEL NUEVO CUBO

Cada una de las tres rebanadas tiene volumen $x^2 h$, mientras cada uno de los tres lingotes es de volumen $x h^2$ y finalmente tenemos el cubito, con volumen h^3.

Vemos así que el volumen del nuevo cubo se puede expresar haciendo intervenir la suma de los volúmenes de los constituyentes de la cubierta:

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2 h + 3x h^2 + h^3$$

Hemos obtenido de esta forma una representación geométrica del desarrollo del cubo del binomio, para el caso en que ambos parámetros son positivos.[1]

En el particular caso en que el lado es un valor entero, digamos k, y el módulo de avance es $h=1$, se tiene

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Desde acá en adelante, nos concentraremos en los cubos de lados enteros.

AVANZANDO POR CAPAS

Antes de continuar, miremos bien las muñecas rusas:[2]

1 "Aunque estos diagramas son tan viejos como el álgebra, es sorprendente lo muy escasos que son los profesores que se molestan en mostrárselos a sus alumnos". Martin Gardner en Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas. Editorial Labor 1987.

2 Busque matrioshka con el Google, y dentro del Google vaya a la opción "imágenes".

Como se sabe, la más pequeña se puede guardar en la que le sigue en tamaño, y así sucesivamente, siendo así posible que la mayor guarde en su seno a todas las demás.

Una vez miradas las muñecas, estamos en condiciones de continuar.

Llamaremos Q_k al cubo de lado k (más brevemente, el k-cubo), y C_k a la cubierta de espesor unitario formada por las ya mencionadas rebanadas, lingotes y el cubito unitario. Con esta notación

$$Q_{k+1} = Q_k \cup C_k$$

Además, el volumen de la capa k-ésima es

$$|C_k| = 3k^2 + 3k + 1.$$

Como hemos visto, cada cubo con $k>1$ se descompone en el cubo anterior más su cubierta asociada y así tenemos:

$$Q_2 = Q_1 \cup C_1$$
$$Q_3 = Q_2 \cup C_2$$

Pero, como $Q_2 = Q_1 \cup C_1$, podemos poner

$$Q_3 = Q_1 \cup C_1 \cup C_2$$

con lo que el 3-cubo queda realizado como el 1-cubo más las dos primeras capas.

Razonando de igual forma,

$$\begin{aligned} Q_4 &= Q_3 \cup C_3 \\ &= Q_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De esta forma llegamos a: El cubo inicial, junto con sus n capas, producen el cubo n+1 - ésimo

$$Q_{n+1} = Q_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_n$$

de donde, finalmente:

El volumen del "último" cubo se obtiene sumando, al volumen del cubo inicial, el volumen de sus capas[3]

$$|Q_{n+1}| = |Q_1| + |C_1| + |C_2| + |C_3| + \ldots + |C_n| \qquad (*)$$

....

3 ¿Esto le recuerda a las muñecas rusas?

....

Autoreferencial:

Otros artículos de Q.e.d. donde se abordan cuestiones conectadas con los temas de este artículo:

Suma de impares, demostraciones visuales Q.e.d. nº 2.

Números de Schröder, C.B., Q.e.d. nº. 3

Un breve paseo por los números poligonales, Gustavo Piñeiro, Q.e.d. nº 4

Ahora observemos que siendo

$$|C_k| = 3k^2 + 3k + 1,$$

al dar a k sucesivamente los valores 1, 2, ..,n, podemos obtener el volumen total de las capas:

$$|C_1| + |C_2| + |C_3| + \ldots + |C_n| =$$

$$[3.1^2 + 3.1 + 1] + [3.2^2 + 3.2 + 1] + [3.3^2 + 3.3 + 1]$$
$$+ [3.4^2 + 3.4 + 1] + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . + [3.n^2 + 3.n + 1]$$

Llegado este momento, y pensando en los lectores con poca experiencia con sumas como estas, reacomodaremos la misma suma, mostrándola en columnas.

$$\begin{array}{cccccc} |C_1| + |C_2| + |C_3| + \ldots + |C_n| = \\ = & 3.1^2 & + & 3.1 & + & 1 \\ + & 3.2^2 & + & 3.2 & + & 1 \\ + & 3.3^2 & + & 3.3 & + & 1 \\ + & 3.4^2 & + & 3.4 & + & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ + & 3.n^2 & + & 3.n & + & 1 \end{array}$$

Sumando la columna izquierda tenemos el triple de 1^2, el triple de 2^2, el triple de 3^2, hasta el triple de n^2, lo que podemos poner también como $3T$, donde abreviamos

$$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

La columna central nos da el triple de 1, el triple de 2, etc., hasta el triple de , lo que sumado nos da $3S$, donde hemos puesto

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Por último, la columna derecha está formada por unos, y como hay n sumandos, la suma nos da exactamente n.

YA FALTA POCO...

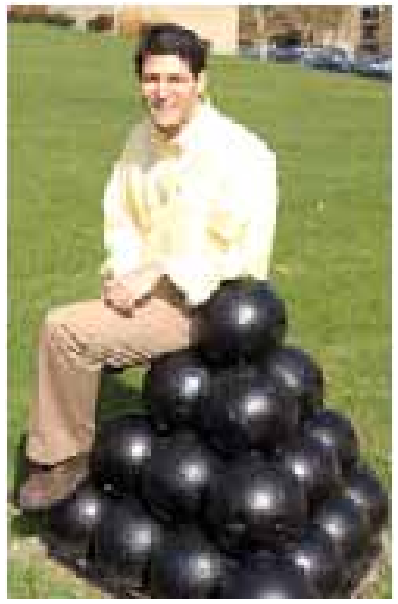
Volviendo a (*), y habida cuenta que $|Q_{n+1}| = (n+1)^3$ y $|Q_1| = 1$, (*)

se transforma en

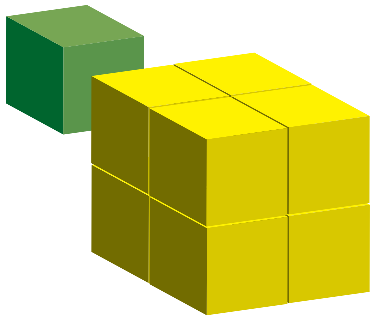
$$(n+1)^3 = 1 + 3T + 3S + n$$

o bien

$$3T = (n+1)^3 - (n+1) - 3S \qquad (**)$$



En 1611, le plantearon a Johannes Kepler (1571-1630) dos problemas de interés bélico.
Sabiendo que las balas de cañón se apilan formando pirámides de base cuadrada, estimar cuantas balas tiene el enemigo conociendo la cantidad de pirámides y las alturas. El lector sagaz sabrá encontrar la respuesta después de leer esta nota.
El otro problema fue, y es, ¿cuál es la forma de apilar balas que ocupen el menor espacio posible?. Kepler conjeturó que era la forma piramidal y durante siglos no pudo demostrarse hasta que en 1998 Thomas Hale (que aparece en la foto sentado sobre las balas) lo demostró "en un 99%", según los árbitros del artículo.



Más de lo mismo…
En la contratapa de este número de Q.e.d. se puede ver que la suma de cubos es un cuadrado. Hilando más fino, y recordando a los números poligonales tratados en la Q.e.d. nro. 4, podemos decir con blandas palabras que, la suma de cubos, es el cuadrado de un triangular.

Recuérdese también la conocida fórmula para la suma de los primeros n naturales:

$$S = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Ahora en (**) todo es conocido, salvo T, que es precisamente lo que nos proponemos conocer.

$$3\,T = (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n\,(n-1)}{2}$$

Resistimos a la tentación de desarrollar el cubo de $n+1$, pero aprovechamos que $n+1$ está presente en todos los sumandos,

$$3\,T = (n+1)\left\{(n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right\}$$

Este es el momento oportuno para desarrollar paréntesis y reagrupar:

$$3\,T = (n+1)\left\{n^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)n\right\}$$

$$= (n+1)\,n\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,(2n+1)}{2}$$

de donde

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

y recordando quién es T, se tiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Que es lo que queríamos obtener.

"Poco después de Platón, en el siglo II a.J.C, se escribe en Alejandría el libro cumbre de la matemática griega, Los Elementos de Euclides, libro que significó el molde según el cual se edificó toda la matemática posterior. Durante siglos fue el libro de texto obligado de todas las escuelas y universidades donde la matemática era considerada. Con Euclides llega la geometría a un máximo; prácticamente toda la matemática es geometría.
Observemos, por ejemplo, cómo las relaciones algebraicas se enuncian y estudian mediante figuras geométricas. Así, el teorema 7 del Libro II que Euclides enuncia dice: 'Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha, más el cuadrado de la otra parte' es, simplemente, equivalente a la relación:

$$(a+b)^2 + a^2 = 2\,(a+b)\,a + b^2$$

En la época griega, por tanto, la geometría ayuda al álgebra, todavía sin métodos propios"

Luis Santaló

La suma de los números cuadrados y el cálculo de áreas

Le habíamos dado licencia por unos números, pero no pudimos evitar convocarlo nuevamente. Arquímedes fue el primero que se ocupó del problema ¡y vaya que se ocupó bien!

El problema consiste en calcular el área del *segmento parabólico* o *triángulo parabólico* unitario.

Arquímedes usó el método de exhaución *(ver Q.e.d. Nº 2)* que en este caso consiste en dividir la figura en bandas rectangulares y obtener dos aproximaciones del área buscada: una por exceso y la otra por defecto.

Entonces el área A del *segmento parabólico* unitario queda comprendida entre estas dos aproximaciones, suma de las áreas de todos los rectángulos.

$$\frac{1}{k^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (k-1)^2\right) \le A \le \frac{1}{k^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2\right)$$

Aparecen las sumas de los primero cuadrados. Usando las fórmulas del artículo, resulta

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2} \le A \le \frac{1}{3} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}$$

El único número comprendido entre estas dos expresiones, que hacen cierta la desigualdad para todo número k es $1/3$. Por esta razón, Arquímedes dedujo que el área del segmento parabólico unitario es $A=1/3$.

Siguiendo la misma idea y la suma de los primeros números a potencia n, podemos calcular el área del *segmento unitario de la curva* $y=x^n$ que tiene la misma forma que el segmento parabólico pero más "panzón" conforme n es más grande.

Repitiendo el método de Arquímedes obtenemos, para k bandas rectangulares de ancho constante $1/k$ que el valor A del área queda comprendida entre las aproximaciones,

$$\frac{1}{k^{n+1}}\left(1^n + 2^n + \ldots + (k-1)^n\right) \le A \le \frac{1}{k^{n+1}}\left(1^n + 2^n + \ldots + k^n\right)$$

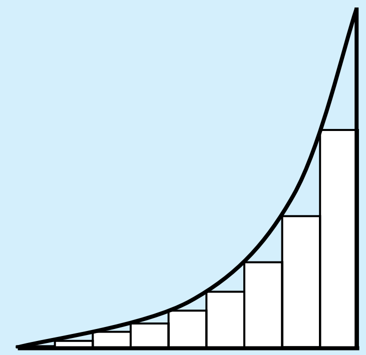
De modo que cuando cuando k tiende a más infinito (aumentamos la cantidad de bandas rectangulares, cada vez más finitas) se obtiene

$$A = \frac{1}{n+1}$$

El Cálculo Integral, dos mil años después de Arquímedes , si bien mantuvo alguno de los caracteres originales del método de exhaución, se convirtió en una potente herramienta que revolucionó toda la ciencia . Después de Newton y Leibniz, el *segmento unitario de la curva* $y=x^n$ se escribe

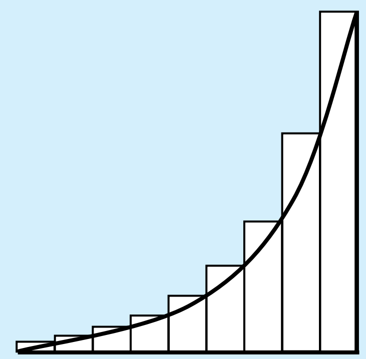
$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

J.C.P



Aproximación del área hecha por defecto.
En este caso tenemos rectángulos de altura:

$$0,\ \frac{1^2}{k^2},\ \frac{2^2}{k^2},\ \frac{3^2}{k^2},\ \ldots,\ \frac{(k-1)^2}{k^2}$$



Aproximación del área hecha por exceso.
En este caso tenemos rectángulos de altura:

$$\frac{1^2}{k^2},\ \frac{2^2}{k^2},\ \frac{3^2}{k^2},\ \ldots,\ \frac{(k-1)^2}{k^2},\ \frac{k^2}{k^2}$$

El último geómetra clásico

Carlos Borches
CBC - UBA

La clase estaba en sus manos, literalmente en sus manos. El pizarrón a su espalda, prolijamente borrado, contenía unas pocas expresiones escritas en el típico lenguaje matemático, pero toda la atención del curso estaba puesta en las curvas y superficies que las manos del maestro dejó suspendidas en el aire y en las palabras, pronunciadas con musical acento catalán, que vuelven imborrables las clases de geometría de Luis Santaló.

Matemático de fama mundial, Luis Santaló llegó a la Argentina en 1939 y supo ganarse el respeto y el cariño de la comunidad científica y docente del país. “Nací en Gerona, Cataluña, en 1911 y provengo de una familia de educadores: mi padre, mis hermanas, mis tías, todos eran maestros y yo también hice el magisterio -recordaba Santaló-, pero quería estudiar ingeniería y por aquella época la única carrera que se podía hacer en Gerona era el magisterio, de manera que me fui para Madrid”

UN CAMBIO DE RUMBO

Las materias en común que por entonces tenían las carreras de ingeniería y de ciencias exactas le permitieron al joven gerundense descubrir que había un universo desconocido en la geometría y en Madrid se produjo el primer cambio de rumbo en su vida.

“Santaló siempre fue una persona mas bien tímida, y cuando recordaba aquellos primeros años decía que su objetivo era simplemente conseguir un puesto de docente en una escuela, hacer el doctorado en Madrid y enseñar en alguna universidad española”, rememoraba su colega y amigo, el matemático Roque Scarfiello. El Instituto Lope de Vega en Madrid recibió al flamante Licenciado Santaló que comenzó a dar clases al tiempo que obtenía su doctorado, en 1936.

Pero la Guerra Civil y la amistad con Julio Rey Pastor, uno de los más importantes matemáticos españoles, alejarían a Santaló de sus modestos sueños.

CON UNA AYUDITA DE LOS AMIGOS

Rey Pastor era, en muchos sentidos, la imagen opuesta de Santaló: extrovertido, polémico y viajante empedernido. Rey Pastor era un matemático itinerante que todos los años pasaba por los principales centros de producción matemática de Alemania e Italia para llevar las novedades científicas a España y a un país que había adoptado como segunda patria: Argentina.

En conferencias de actualización matemática brindadas en la Universidad de Madrid, Rey Pastor conoció a Santaló y no tardó en advertir su talento. “Santaló: firme esta solicitud y váyase para Alemania. Si Ud. se queda aquí va a ser profesor de enseñanza media toda la vida”, sentenció Rey Pastor, y Santaló comprendió que la oferta no tenía nada de improvisado.

Rey Pastor ya había gestionado por su cuenta una beca para que Santaló se trasladase a Alemania donde trabajaría bajo la dirección de Wilhelm Blaschke, quien estaba trazando nuevos surcos en la milenaria geometría.

El buen ojo de Rey Pastor le permitió a Santaló encontrar un terreno fértil en la Universidad de Hamburgo donde comenzó a ganarse un lugar en la historia de las ciencias como uno de los fundadores de la llamada geometría integral. Varios años después, cuando Santaló publicó *Integral Geometry and Geometric probability*, un texto que aún hoy en día aparece frecuentemente entre las referencias bibliográficas de la especialidad, Mark Kag, otro de los grandes geómetras del siglo XX dirá sobre el matemático gerundense: “Por muchos años, líder indiscutido en el campo de la geometría integral”.

Pero por aquellos años Europa marchaba inevitablemente hacia un nuevo conflicto armado, que tenía en España su ensayo preliminar y del cual participa Santaló cuando abandona Alemania y se enlista en las fuerzas republicanas. “Cambió radicalmente mi vida -recordaba Santaló muchos años después-. Estuve dos o tres años en la guerra civil, tuve que actuar allí bajo el arma de aviación. Salí bien, pero con todos los traumas con que uno queda después de una situación así, sobre todo cuando es derrotado...” La rendición de las fuerzas republicanas no terminaría con la pesadilla del matemático, que pudo cruzar la frontera dando con los huesos en un campo de concentración francés. Elie Cartan, un destacadísimo miembro de la comunidad matemática francesa, que unos años después pasaría por los campos de concentración del nazismo, tramitó la liberación de Santaló y allí apareció nuevamente don Julio Rey Pastor, quien ya tenía todo arreglado para instalar al recién liberado en la Argentina.

MUY LEJOS DE CASA

Cuando el barco que lo sacaba de Europa pasó por las costas portuguesas se enteró que la guerra se había desatado en todo el continente, pero Santaló trataba de imaginar cual sería su futuro. Rey Pastor lo había puesto en contacto con la matemática de primera línea y ahora lo esperaba con una plaza universitaria en un extremo del continente americano, lejos de la guerra, en Argentina, más exactamente en la Ciudad de Rosario. “Puedo decir que soy rosarino, si bien estuve más tiempo en Buenos Aires que en Rosario. Los primeros diez años, los que impactan por las novedades y por todo lo que se extraña, los pasé en Rosario”, rememoraba Santaló recordando la ciudad donde conoció a su esposa y donde nacieron sus tres hijas.

De aquellos días quedaron imágenes frescas: “Después de las penurias de la guerra, donde el primer problema era conseguir comida, iba al mercado para ver las cosas baratas que se podían comer. Creo que en esa época nadie se moría de hambre en las ciudades”, recordaba.

En Rosario, Santaló materializó trascendentales ideas de la geometría integral en un instituto dirigido por otro exiliado, el italiano Beppo Levi.

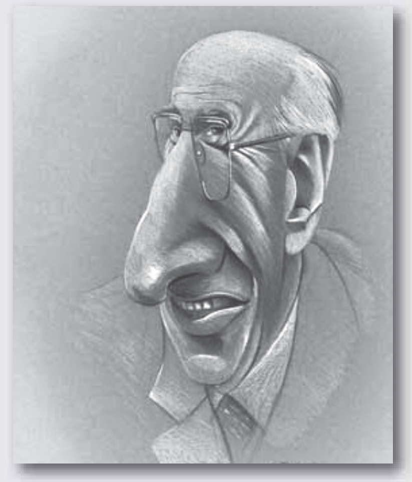
Unos años después la guerra terminó y la fama del geómetra catalán, rosarino por adopción, llegó hasta la nueva Meca del mundo científico: el centro de Estudios Avanzados de Princeton, una nueva Alejandría creada para recibir a los científicos europeos que habían escapado del nazismo. Luego de ganar el premio instituido por la Fundación Guggenheim, Santaló pasó un período en Princeton, que por entonces albergaba a personajes de la talla del físico Albert Einstein, el multifacético John Von Newman y el lógico Godel.

Fue su consagración internacional, pero si en su momento Alemania fue un lugar de tránsito, ahora lo serían los Estados Unidos. “En esa época a ninguno de nosotros se nos ocurría quedarnos en el exterior, sentíamos que nuestro deber era volver, que aquí había muchas cosas importantes para hacer”, aclaraba Scarfiello.

MAESTRO DE MATEMÁTICA

Lejos de encerrarse en el mundo de los especialistas, donde Santaló ya gozaba de prestigio internacional, el geómetra nunca perdió su vocación docente, su mirada humanista de la vida. Miles de profesores de enseñanza media pudieron escucharlo y leerlo en jornadas, cursos y textos destinados a la enseñanza de la matemática, donde la disciplina milenaria no quedaba restringida a un conjunto de técnicas.

Para Santaló, más allá del valor de las aplicaciones, había en las ideas matemáticas componentes estéticos irresistibles: “si en un principio fue el verbo y éste hizo la luz, lo primero que se iluminó fueron las ideas diáfanas e incorsútiles de la matemática”



“Siempre girando alrededor del arte de enseñar, que no es otro que el de impartir conocimientos a los alumnos hasta lograr que los absorban y asimilen como cosa propia olvidando cuándo las aprendieron y quiénes se las han enseñado.
Tal es la gloria del maestro: sembrar ideas para que las perpetúan los alumnos. Así se pueden aplicar a ellos los versos que Manuel Machado escribió para los autores de coplas:

‘Hasta que el pueblo las canta
las coplas, coplas no son
y cuando las canta el pueblo
ya nadie sabe el autor.

Procura tú que tus coplas
..vayan al pueblo a parar,
aunque dejen de ser tuyas
para ser de los demás.

Que el fundir el corazón
en el alma popular
lo que se pierde en nombre
se gana en eternidad’

(Luis Santaló, al recibir el título de Académico Emérito de la Academia Nacional de Educación, Buenos Aires, 1997)

Problemas Matemáticos

Dido, una reina que sabía geometría

Cuenta la leyenda que Dido, primera reina de Cartago, llegó escapando de Tiro a las costas del norte de África, en una zona habitada por una tribu de libios liderados por Jarbas. Hospitalario, el rey Jarbas ofreció a Dido una porción de tierra donde fundar su reino.

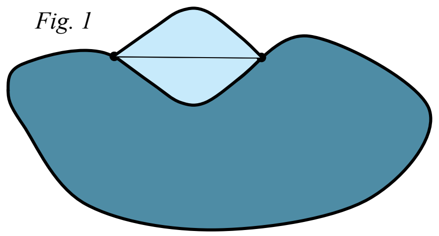
Virgilio señala que Jarbas le dio a Dido una piel de buey permitiéndole tomar tanta tierra como la que pudiera abarcar con la piel.

Ni lenta ni perezosa, Dido corto la piel en finas tiras que unió en una larga cuerda encerrando una zona de importantes proporciones donde construyó una fortaleza que más tarde se convirtió en la ciudad de Cartago, o *Quart-Hadash*, que en fenicio significa Ciudad Nueva.

Esta historia promovió un clásico problema geométrico: dado una cuerda de longitud fija ¿Cuál es la figura de superficie máxima que tiene por perímetro la longitud de la cuerda? En otros términos: de todas las figuras de igual perímetro (figuras isoperimétricas) ¿Cuál maximiza el área?

Dido sabía la respuesta: el círculo y abarcó una extensa proporción en forma de semicírculo porque además de geometría, Dido conocía la importancia geopolítica de tener costas sobre el Mediterráneo.

Fig. 1



Si no fuera convexo, podemos encontrar una de igual perímetro y mayor superficie.

CON UN PERÍMETRO DADO, AL CÍRCULO NO HAY QUIÉN LE GANE.

Si bien la creencia de que la superficie se maximiza en el círculo era parte de los saberes del mundo helénico, hubo que esperar hasta el siglo XIX para que el matemático suizo Jakob Steiner obtuviera una demostración satisfactoria de este hecho.

Pero veamos una demostración "blanda" de esta propiedad del círculo, demostración que aparece en el libro de Santaló *Geometría en el Profesorado*, publicado por la Red Olímpica.

Primera etapa:

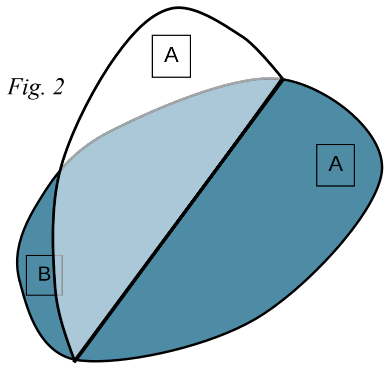
La figura en cuestión debe ser convexa, es decir, cualquier cuerda (segmento que une dos puntos de la figura) debe quedar dentro de la figura. (ver fig. 1)

Segunda etapa:

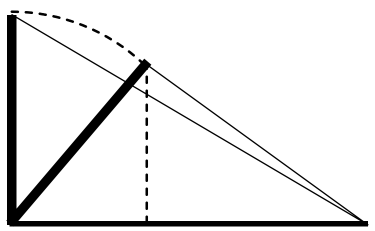
Si una cuerda divide a la figura en dos de igual perímetro, también las dos partes tienen que tener igual superficie. (ver fig. 2)

Un descanso antes de la tercera etapa: De todos los triángulos con dos lados conocidos el de mayor área es el rectángulo.

Fig. 2

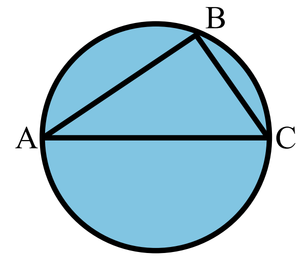


Si la región A tuviera mayor superficie que la B, al doblar la región A sobre la B, se obtiene una figura de mayor superficie e igual perímetro que la original.



Conocido el lado grueso y el lado fino, el triángulo rectángulo tiene mayor área porque tiene igual base y mayor altura.

Una propiedad del círculo que debemos recordar es: un triángulo inscripto en una circunferencia que tiene al diámetro por uno de sus lados es un triángulo recto. Recíprocamente, si todos los ángulos inscriptos en una cuerda que divide a la figura en dos de igual perímetro, son rectos, la figura es un círculo.



$A\hat{B}C = 90º$

Tercera etapa:

Entre todas las figuras de perímetro p el círculo es la que tiene mayor superficie.

Admitamos la existencia de una figura convexa, no circular, de perímetro p que tuviera la superficie más grande posible como la azul de la figura 3.

Vamos a construir una figura de igual perímetro y de mayor superficie.

Para ello trazamos una cuerda MN que divide a la figura en dos de igual perímetro (y también de igual superficie por la segunda etapa)

Como no es un círculo, hay un punto K que no forma un ángulo recto con la cuerda MN.

Como en la segunda etapa, doblemos la figura por MN y consideremos la figura que resulta. Ésta tiene igual perímetro e igual superficie que la original y es simétrica con respecto a MN. El punto K´ es el simétrico de K con respecto a la cuerda MN. La reproducimos en la figura 4.

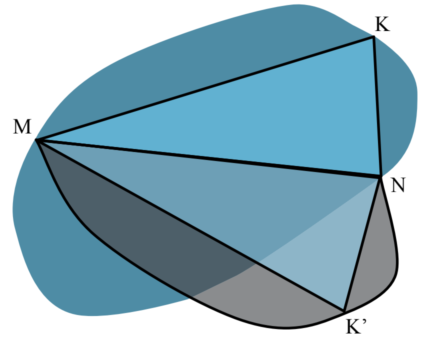


Fig. 3

$M\hat{K}N$ no es recto

$M\hat{K}'N$ no es recto

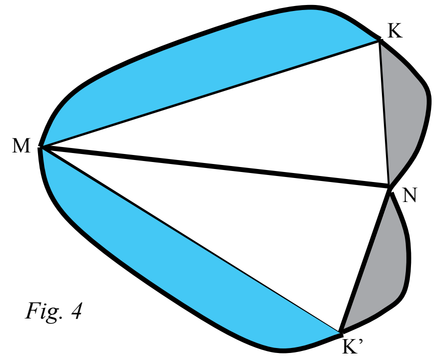
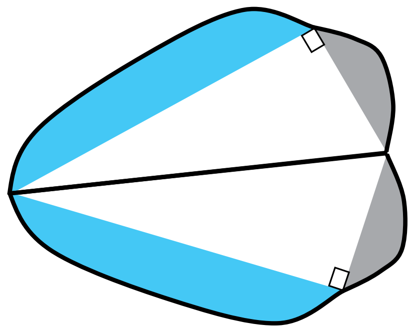


Fig. 4

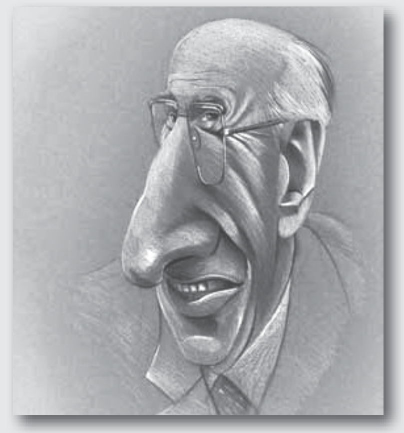
Esta figura tiene igual perímetro e igual superficie que la original
Además los triángulos blancos no son rectángulos

Cual si fuera un rompecabezas, tomamos las cuatro piezas pintadas y con una celeste y una gris armamos un ángulo recto y hacemos lo propio en forma simétrica con las otras dos.

La figura resultante tiene el mismo perímetro que la original y una superficie mayor porque los triángulos rectángulos tienen mayor superficie que los que no lo eran.



Esta figura tiene igual perímetro y mayor superficie que la original.
Esto genera una contradicción que proviene de suponer que no es un círculo.
Q.e.d.



La demostración presupone la existencia de una figura que maximiza el área. El lector interesado en la existencia debe consultar el libro ¿Qué es la matemática? de Courant y Robbins

Lógica
Matemática

Por Christian Espíndola
Dto. Matemática, FCEyN - UBA

La paradoja de Russell

y la teoría axiomática de conjuntos

Bertrand Russell

Con frecuencia en la historia de la matemática se da el caso en que el descubrimiento de una nueva paradoja y los intentos por solucionarla agregan interesantes desarrollos, ampliando las fronteras del conocimiento. Desde el descubrimiento de los números irracionales, llevado a cabo por los antiguos griegos, hasta las modernas teorías sobre el infinito iniciadas por Georg Cantor a finales del siglo XIX, los matemáticos han debido adaptarse a situaciones no deseadas, pero que una vez aceptadas, supusieron una profundización del entendimiento y una mejor comprensión del universo matemático. Entre las paradojas que asestaron los golpes más fuertes al corazón de la teoría, hay una que se destaca por su tardía aparición, ya que pese a estar ligada a conceptos elementales que subyacen en todos los razonamientos, y aunque habían aparecido ya versiones más lingüísticas de ella, no fue explícitamente formalizada sino hasta 1901, gracias al matemático y filósofo Bertrand Russell.

La paradoja de Russell, como se la conoce, es quizás el ejemplo paradigmático de los tremendos problemas que ocasiona la autorreferencia en el razonamiento lógico. En su versión más pura, la paradoja surge de las nociones de conjunto y pertenencia cuando se intenta responder a la siguiente pregunta, en apariencia inocente: el conjunto de todos aquellos conjuntos que no se contienen a sí mismos, ¿se contiene o no a sí mismo? Rápidamente se observa que cualquiera de las dos respuestas conduce a una contradicción, inherente a la definición misma del supuesto conjunto: si tal conjunto se contuviese a sí mismo, no podría, por definición, ser elemento de sí mismo, lo que es absurdo. Pero si no se contuviese a sí mismo, debería encontrarse entre los elementos de sí mismo, según su definición, lo que también es contradictorio. Esta situación sin salida había venido a demostrar que aún después de siglos de desarrollos matemáticos, las ideas más básicas no eran del todo comprendidas, lo que colmó de inquietudes a la comunidad matemática internacional. Era inadmisible que la piedra fundamental donde se apoyaba toda la estructura de los razonamientos matemáticos acusara de pronto esta insolente paradoja, pues estaban en juego todos los logros obtenidos en esta disciplina desde el momento en que sus cimientos revelaron de pronto una fisura tan descomunal. A esa altura, encontrarse con tan irreverente antinomia era realmente humillante.

Pero la reacción de los matemáticos y filósofos del mundo no se hizo esperar, y desde que la paradoja tomó estado público, dio lugar a múltiples intentos por resolverla, generando una de las ramas más fructíferas de la matemática del siglo XX, la teoría axiomática de conjuntos. El propio Russell había propuesto una solución basada en una compleja teoría de tipos, en la que la autorreferencia era eliminada ad hoc estableciendo que cada conjunto sólo pueda ser elemento de estructuras de tipo superior (que a su vez sean elementos de otras estructuras más complejas), pero que de ningún modo debían mezclarse los niveles de esa jerarquía. Tal solución era, sin embargo, lo suficientemente oscura como para que Russell expresara luego sus dudas al respecto. Más exitosa, en cambio, resultó la segunda de las soluciones propuestas, la teoría axiomática de Zermelo.

Hasta el momento se asumía implícitamente que los conjuntos podían ser definidos en forma comprensiva, es decir, en lugar de listar todos sus elementos (cosa que sería virtualmente imposible en el caso de conjuntos infinitos), se lo caracterizaba mediante alguna propiedad común que tuvieran todos ellos, y era esta propiedad la que servía para definirlo. Zermelo modificó un poco la flexibilidad de esta práctica usual, estableciendo que tal método sólo servía para definir conjuntos si la propiedad usada se aplicaba a los elementos de un conjunto previamente definido. Así, los "conjuntos que no se contienen a sí mismos" no podía usarse para definir el conjunto de Russell, puesto que en principio tal propiedad se aplica a todo el universo de conjuntos posibles en lugar de restringirse a los elementos de un conjunto ya existente. Esta simple restricción en el tipo de propiedades usadas como definitorias fue suficiente para descartar la paradoja de Russell, y también, de paso, otras paradojas que venía acumulando la teoría de conjuntos. El enfoque axiomático permitió salvar gran parte del edificio matemático al proveerlo de nuevos fundamentos. La cuestión

que quedaba por determinar era la solidez de tales fundamentos y su efectividad para inocular la teoría de eventuales paradojas que pudieran aún acechar ocultas.

La paradoja del barbero, otra versión de la paradoja de Russell

Desde los inquietantes descubrimientos de Gödel en 1931 se sabía que la teoría de Zermelo no podía demostrar su propia consistencia. Por lo tanto, la creencia en que tal teoría resuelve de una vez y para siempre todos los problemas era ni más ni menos que una cuestión de fe. Ante este panorama, convenía tener soluciones alternativas a la paradoja de Russell que fueran más satisfactorias desde el punto de vista filosófico. Una refrescante propuesta fue la teoría de Willard van Orman Quine conocida como New Foundations. En ella Quine se propone retomar la idea original de Russell de la teoría de tipos para adaptarla a un enfoque más sintáctico. Zermelo proponía admitir como definitorias las propiedades que describan elementos de conjuntos previamente establecidos; Quine, en cambio, propone admitir como válidas aquellas propiedades que se encuentren estratificadas respecto a los tipos de estructuras de los que hablaba Russell. Por ejemplo, hablar de los conjuntos que no pertenecen a sí mismos (o incluso de los conjuntos que pertenecen a sí mismos) no sería posible en la teoría de Quine porque tal propiedad no puede expresarse sintácticamente respetando los estratos de los conjuntos en cuestión; la teoría prohibe expresamente usar toda propiedad autorreferencial que involucre la pertenencia, y sólo permite utilizar tal noción para vincular entidades correspondientes a distintos estratos.

Pero por más seductora que resulte la teoría de Quine, muchos se rehusan a utilizarla por contradecir uno de los principios más útiles y fecundos para el desarrollo de la matemática: el axioma de elección. Esta situación condujo a considerar otras alternativas para solucionar la paradoja de Russell que no dejen de ser compatibles con el mencionado axioma. Una teoría paralela que satisface este requisito es la teoría de von Newmann-Bernays-Gödel (NBG), que resuelve la complicación russelliana desarrollando un nuevo tipo de entidad: la clase. Además de los conjuntos, NBG admite aquellas colecciones o conglomerados de elementos que son demasiado extensos para ser considerados conjuntos, y les da el nombre de clases propias; se marca así la diferencia ontológica con los conjuntos, que son en esta teoría clases pequeñas. En este contexto, la solución a la paradoja pasa por la convención de que sólo los conjuntos pueden pertenecer a estructuras más grandes, pero que las clases propias no pueden ser elementos de ninguna otra estructura. El conjunto de los conjuntos que no son elementos de sí mismos, no sería, en realidad, un conjunto, sino una clase propia, y la pregunta de Russell deja de tener sentido, evadiendo de este modo la temida contradicción.

Otra curiosa alternativa que imita la dicotomía ontológica de NBG entre conjuntos y clases propias es la teoría de doble extensión desarrollada recientemente por Andrzej Kisielewicz. En esta teoría se permite una dicotomía en el significado de pertenencia, admitiendo dos nociones distintas de pertenecer a un conjunto, y adecuando las propiedades definitorias de conjuntos a ambos tipos de pertenencias. Desafortunadamente, tal teoría se aleja demasiado de la idea platónica del universo conjuntista, y se hace demasiado difícil razonar con ella. Una solución más pintoresca es la introducida por Isaac Malitz, la teoría positiva de conjuntos. En ella las propiedades definitorias permitidas no deben mencionar ningún tipo de negación, sino sólo enunciados positivos. Así, no se puede hablar de "conjuntos que no pertenecen a sí mismos", mientras que sí está permitido mencionar "conjuntos que pertenecen a sí mismos". Esta última propiedad no lleva a ninguna contradicción conocida, y por lo tanto la paradoja de Russell se evita una vez más. Variaciones de estas alternativas hay en abundancia, contándose generalizaciones de todas las teorías anteriores, adaptadas a gusto de cada uno. Hay incluso una teoría de conjuntos "de bolsillo", en la que todos los conjuntos infinitos son del mismo tamaño, lo que recorta ampliamente el universo conjuntista de Zermelo, en el que jerarquías de infinitos cada vez más grandes se extendían sin final.

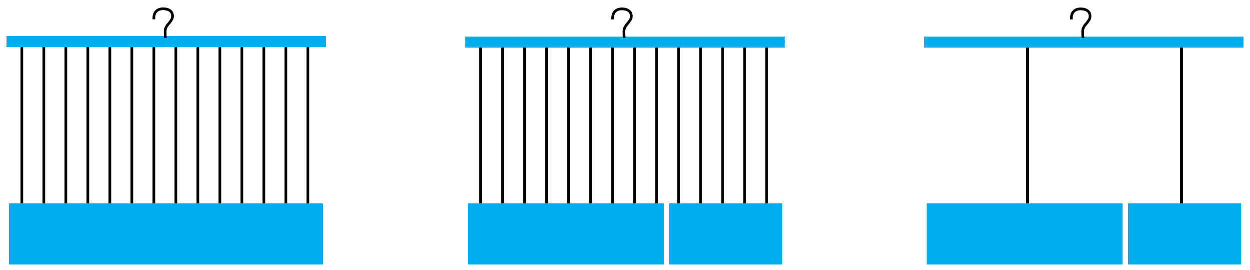
Todas estas teorías axiomáticas tienen sus ventajas y desventajas y no hay ninguna que sea claramente mejor que otra. Sin embargo, la teoría de Zermelo ha cobrado notoriedad después de la variación propuesta por Fraenkel y luego de que se agregara el axioma de elección como apéndice, constituyendo la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC). Su uso es tan frecuente que se ha tornado la teoría preferida de los matemáticos, quienes, muchas veces sin saberlo, hacen uso de sus axiomas y reglas. El gran legado de la paradoja de Russell es esta bella teoría, que no habría sido considerada de no haberse querido resolver aquella contradicción.

Con cada caída, las fronteras del saber se expanden. Con cada nueva paradoja aprendemos algo más. Por ahora, el equilibrio del edificio matemático está fuera de peligro, al menos hasta que otra paradoja lo sacuda nuevamente y obligue a poner en marcha una vez más la imaginación de los matemáticos. Será su tarea, llegado el caso, desarrollar las correspondientes propuestas para evitar caer en las trampas de este sinuoso camino hacia la búsqueda de la verdad.

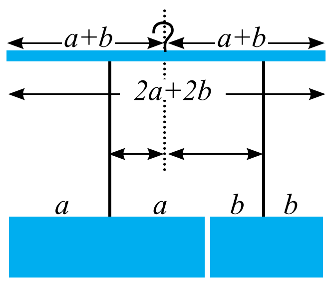
Por Agustín Rela
CBC - UBA

Física y geometría

Se dice a veces que la física, como ciencia natural, necesita de un universo para su existencia; en cambio para la matemática, una ciencia formal, alcanza el pensamiento.
Sin embargo, he aquí un ejemplo de una ley física, la de la palanca, deducida de principios puramente geométricos, a los que se agregan, quizás, el principio de razón suficiente y el de simetría.



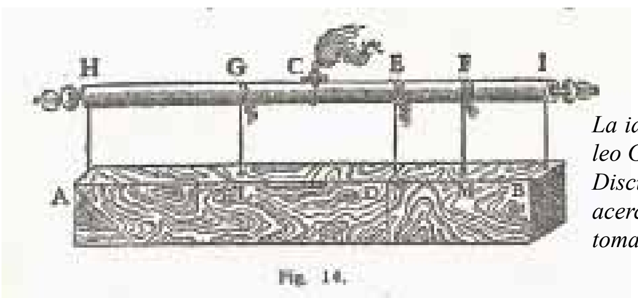
Una barra uniforme cuelga de hilos elásticos iguales. El corte mantiene el equilibrio de las partes. Para sostenerlas, y por simetría, bastan los hilos centrales.



Las longitudes de los bloques son 2a y 2b. Los brazos de la palanca, supuesta de peso despreciable, resultan de longitud inversamente proporcional a los pesos.

$$\frac{\textbf{Peso a}}{\textbf{Peso b}} = \frac{\textbf{Longitud b}}{\textbf{Longitud a}}$$

$$F_a x_a = F_b x_b$$



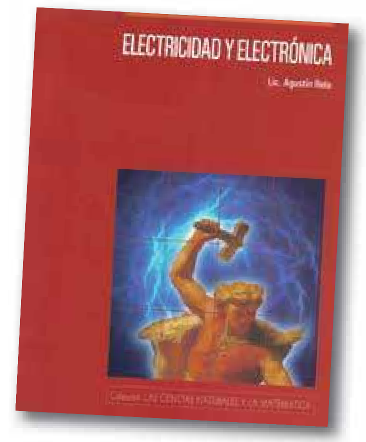
La idea original es de Arquímedes. Galileo Galilei la incluyó en 1638 en su obra Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos nuevas ciencias, de la que tomamos la figura.

Tradicionalmente la fórmula $F_a.x_a = F_b.x_b$, más usual hoy que la de las proporciones, se enseña como una consecuencia de la observación experimental, a pesar de que admite una demostración teórica.
¿Podríamos sospechar que lo mismo ocurre con las demás leyes físicas? ¿Será la física una aventura del pensamiento?

Electricidad y electrónica

Pareciera que estuviéramos soñando: el Gobierno Argentino publicó 100.000 ejemplares de este libro para ser distribuido por todo el país en forma gratuita y para que llegue a las manos de todos los estudiantes y sus profesores que lo deseen.
Y lo que les llega a las manos es un libro excelente y original. Nada de esos textos aburridos que desanimaban casi inmediatamente, y hasta podían disuadir a los chicos más curiosos de elegir la ciencia.Electricidad y electrónica es todo lo contrario: es capaz de interesar hasta al más apático.
Los buenos profesores –y Rela lo es sin ninguna duda– son capaces de dar una mínima base teórica, un mínimo y muy democrático formuleo... y pegar un salto al infinito lleno de maravillas, secretos, chismes, aplicaciones, curiosidades. Cualquiera sabe que entre esas primeros palotes simbólicos de la física y el desarrollo del funcionamiento del transformador hay decenas de ecuaciones con las que fatigar a los estudiantes... para qué, si la gran mayoría no las necesita y aquellos que alguna vez las necesiten sabrán dónde encontrarlas. Rela las obvia, le basta un simple párrafo, un dibujo, un gráfico, para llegar cómodamente a explicar lo último, lo importante, lo sorprendente, la tecnología de punta, y hasta la especulación sobre el futuro.
La solidez argumental del cuerpo del texto está garantizada. Y constituye un arquetípico ejemplo de que la prosa ágil y placentera no está reñida con el rigor científico.
En las columnas laterales no faltan los cotilleos históricos, curiosos, graciosos, y atractivos. Las aclaraciones auxiliares y una extensa gama de viñetas y parrafitos que son imposibles de dejar de leer.
En definitiva: no se quede sin el suyo.

Ricardo Cabrera



Electricidad y Electrónica
Lic. Agustín Rela

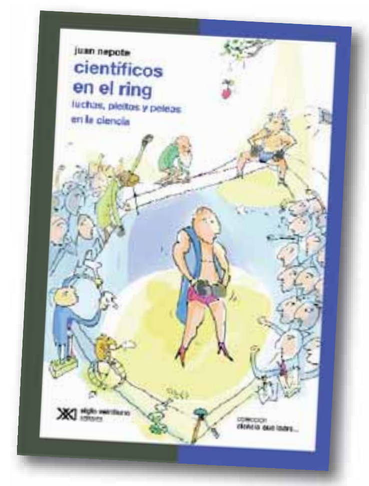
Instituto Nacional de Educación Técnica (INET) Buenos Aires 2010

Científicos en el ring

Luchas, pleitos y peleas en la ciencia

Para muchos, la ciencia es un espacio etéreo donde transitan seres relajados, intelectualmente generosos, que practican día a día los ejercicios espirituales que los llevarán al paraíso de la verdad. Nada que ver.
La ciencia, como producto social, está atravesada de todas las pasiones humanas y el físico mexicano Juan Nepote nos acerca algunos episodios de lujo.
Newton vs. Leibniz luchan en la arena del cálculo infinitesimal, Edison vs Tesla se sacan chispas por la electricidad, Darwin vs. Wallace combaten por la teoría de la evolución de las especies, Lavoisier vs. Priestley sobre el descubrimiento del oxígeno, Pasteur vs. Pouchet por la generación espontánea, Bohr-Heisenberg vs. Einstein-Schrödinger cierran la contienda batallando por la mecánica cuántica. Es la velada histórica que los mantendrá atrapados hasta la cuenta final, porque en la ciencia, todo vale.

C.B.



Científicos en el ring.
Luchas, pleitos y peleas en la ciencia
Juan Nepote

Siglo XXI. Buenos Aires 2011

Intimidades de un cierre…

Homenaje a un maestro o aunque no lo veamos, Arquímedes siempre está

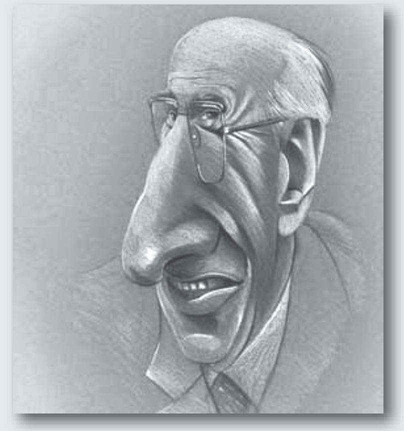
- A: La humorada de Borges sobre el culto al sistema decimal me hizo acordar de una ocurrencia que me contaron hace un tiempo.
- JC: ¿Cuál?
- A: Hay 10 clases de personas: la que entienden el sistema binario y las que no lo entienden…
- C: ¡Muy bueno!
- I: No me dejen afuera. ¿Me lo explican?
- C: Es un chiste para "exactos", aunque lo he visto reproducido en remeras: en el sistema de numeración binario, que sólo usa "1" y "0", el 10 representa al número 2 del sistema decimal.
- I: ¡Claro! La frase cobra sentido. y pone del mismo lado a los que entienden el chiste con los que tienen presente el sistema binario. En eso radica su impacto. ¡Es bueno!
- JC: Lo cierto es que es el primer número de Q.e.d. en homenaje a una personalidad. No sé si se va a repetir esta circunstancia, pero está bueno haber empezado con Luis Santaló.
- A: Me parece recordar publicada en *Mundo Atómico* la elegante demostración de la propiedad de que a perímetro dado, al círculo no hay quién le gane en superficie. Recuerdo cómo me atrajo ese argumento en 1952, cuando yo tenía diez años y el entonces presidente Juan Perón, que aparecía en la revista, llevaba en el brazo una banda de luto, como se estilaba en esa época para los viudos.
- C: Es bellísima, y tal como nos indicara Agustín, también se puede encontrar en los libros del ruso Iácov Perelman.
- A: Curiosamente, creo recordar que mi maestro Silvera me contó en 1954 una historia similar a la de Dido, atribuida a un conquistador español o portugués, quien habría estafado a los aborígenes americanos con el mismo truco. Me resulta difícil creer que alguien, respete semejante trampa en materia territorial.
- C: La historia aparece en la Eneida y contempla una condición de contorno que es la playa. Si la suponemos recta, la solución es un semicírculo donde la costa constituye el diámetro.
- JC: Santaló advierte que la demostración visual presupone la existencia del máximo y por tal razón es incompleta.
- I: ¿Cómo no va existir tal máximo? ¿No es una exageración formalista, propia de matemáticos?
- JC: Santaló, a diferencia de la corriente imperante en la segunda mitad del siglo XX, prescindía frecuentemente del formalismo. Sus clases eran muy claras y hacia las demostraciones moviendo las manos y escenificando las transformaciones geométricas moviéndose en el frente del aula de aquí para allá, como nos cuenta Carlos en su artículo. Terminada una de sus demostraciones nuestros cuadernos solían quedar en blanco, porque no había muchas anotaciones en el pizarrón. En una ocasión un alumno le pidió si podía escribir "una demostración" a lo que le contestó: "la demostración es la que acabo de hacer. ¡Escríbala usted!" A pesar de esto, su temperamento "apasionadamente moderado" como decía Manuel Balanzat, hacía que rara vez se enredara en una discusión acalorada. Por otro lado su calidad humana, científica y docente hacían que fuera respetado por todos.
- I: Este número de Q.e.d. tiene muchas referencias a Santaló, pero… ¿existe un Teorema de Santaló como si existen en el caso de otros matemáticos ilustres?
- JC: Hay una *desigualdad de Santaló* que es la versión en triángulos de la propiedad isoperímetrica que estamos comentando. No estoy seguro que se conozca con su nombre pero el siguiente es un Teorema de Santaló clásico de la Geometría Integral:

la cantidad de figuras que corta una línea elegida al azar es, en promedio

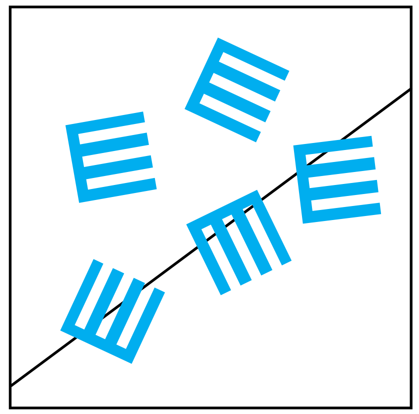
$$\frac{\text{(cantidad de figuras) x (perímetro de figuras)}}{\text{perímetro del rectángulo que las contiene}}$$

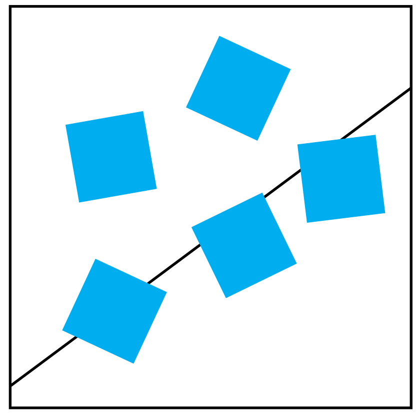
- A: A propósito de rigor. Me atrevo a suponer que la fórmula no da *la cantidad de figuras* cortadas por la recta, sino *la cantidad de intersecciones de la recta con los perímetros de las figuras*, ya que la recta puede entrar y salir varias veces de una misma figura cóncava. La figura ilustraría un caso. ¿Qué opinan?
- JC: Tenés razón. Está faltando la condición de que las figuras sean *convexas*.
- A: Ni hablar si las figuras en lugar de convexas fueran fractales, la fórmula de Santaló sería imposible. A la luz del artículo de este número podría llegar a cortarla infinitas veces.
- I: ¿Se puede explicar, en palabras blandas, qué es la Geometría Integral?
- A: Tal vez un ejemplo ayude. Hay muchos problemas de probabilidad geométrica que son gérmenes de esta rama de la matemática que tan bien desarrolló Santaló.
- C: Como el problema de la Aguja de Buffon.
- JC: En un libro editado por Espasa Calpe en 1951 que mi colega Walter Feruglio me acercó hace unos días se presentan varios de estos problemas.
- I: ¿Qué libro?
- JC: No lo van a creer. Es un libro cuyos autores son J. Rey Pastor y un tal Santaló Sors.
- I: Firma incluyendo su segundo apellido como se estila en España
- JC: La colección se llamaba *Nueva Ciencia – Nueva Técnica* y en la colección tiene obras de J. Coulomb, M. Born y A. Einstein junto a otras de A. Tarski, E. Schrödinger que ya son conocidos de Q.e.d y muchos otros, abarcando diversas disciplinas científicas. Hermosa colección. El libro se llama: *Geometría Integral*
- C: ¿Se puede contar alguno de esos problemas o los lectores huirán despavoridos, como los personajes del libro de Agustín que comentamos en este número?
- JC: Me parece que se puede. Ensayo uno en versión libre y exclusiva para Q.e.d
- I: Que venga.
- JC: Se tiene una varilla recta de 10 cm de largo. Se realizan dos cortes arbitrarios (al azar) de la varilla de modo que queda partida en tres pedazos…
- C: ¿Y el problema?

Katsushika Hokusai(1760-1849) fue un pintor y grabador japonés autor de La gran ola de Kanagawa, obra que ilustra la tapa de esta edición de Q.e.d. La gran ola está a punto de romper y su superficie pierde la suavidad que nos resulta usual para adquirir una forma que se relaciona mucho más con los objetos fractales.

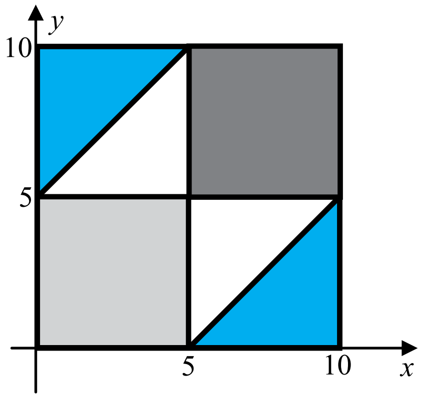


Lo importante es no perder de vista que la matemática no es una sistemática de definiciones y propiedades evidentes para el alumno, sino que éste debe tomar conciencia de que con el aprendizaje de la matemática puede resolver nuevos problemas, aunque sean juegos o curiosidades recreativas, y entender mejor el mundo que lo rodea.

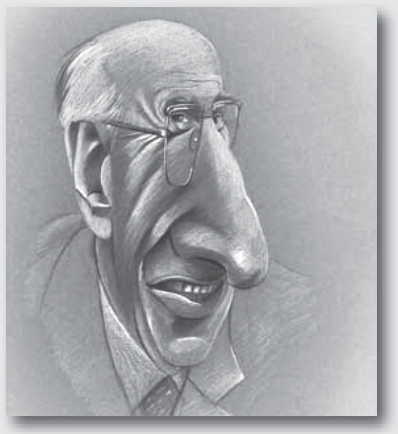




Varilla de 10 cm con los dos cortes



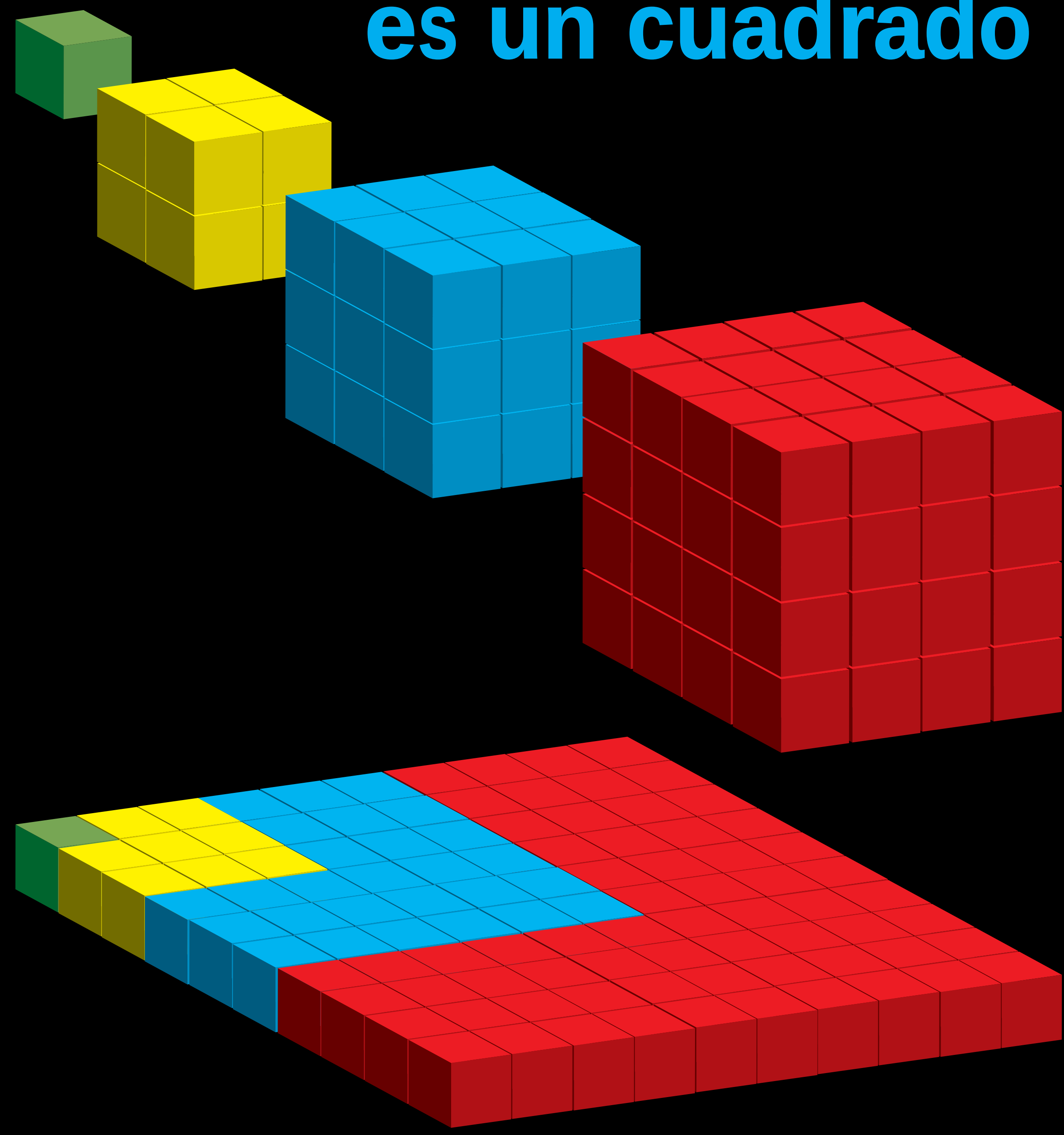
- JC: Te apuesto 30 míos contra 10 tuyos a que con los tres pedazos no se puede armar un triángulo. ¿Te conviene aceptar o te estoy tratando de estafar?
- C: Para que me convenga aceptar, la probabilidad de que se pueda armar un triángulo debería superar el 33,33%
- A: Es cierto: una de cada tres veces debería ser posible armarlo.
- I: ¿Y la Geometría Integral? ¿Es porque hay que armar un triángulo?
- JC: No. El problema data, por lo menos de 1872 donde un tal Halphen lo publicó en el Boletín de la Sociedad Matemática de Francia. La *Geometría Integral* aporta una solución original al problema y lo pone en un contexto teórico adecuado.
- C: Bueno, ¿me conviene o no aceptar la apuesta?. Ya estamos armando una mesita en una esquina de Buenos Aires para hacer unos pesos. ¡Apueste y gane!
- JC: La probabilidad de que con dos cortes arbitrarios se pueda armar un triángulo con los tres pedazos de varillas resultantes es de 1 en 4. Es decir, el 25% de las veces se puede. Una apuesta justa sería que yo pagara 40 por 10 que arriesgás. La banca, en este caso yo, tiene ventaja si es 30 a 10.
- I: ¿Es difícil la explicación?
- JC: La que se da en el margen, si bien no es la original del libro, se aprovecha de la "idea feliz" que allí utiliza. Esta es: si los dos cortes se hacen en *x* e *y* centímetros respectivamente, se pueden pensar como las coordenadas de un punto *(x,y)* del plano. Entonces el cálculo de la probabilidad se convierte en medir el área de los casos favorables y dividirla entre el área de los casos posibles.
- A: Claro. Para que no se forme un triángulo alcanza y sobra (perdón, los matemáticos dicen es necesario y suficiente) con que uno de los tres pedazos mida la mitad de la varilla o más. Es decir más de 5 centímetros.
- JC: Efectivamente y como sólo una de las tres varillas puede medir 5 centímetros o más, el cálculo de la probabilidad de que no se puede armar un triángulo es fácil. El cuadrado de 10 por 10 representa los cortes posibles *(x,y)*. El cuadrado inferior (gris claro) representa el caso cuando los dos cortes estuvieron por debajo de los 5cm y el cuadrado superior cuando los dos cortes fueron ambos superiores a los 5cm. Los dos triángulos rayados representan a los cortes que difieren entre sí en más de 5cm: $|x-y| \ge 5$.
- I: De modo que el sector blanco corresponde a los cortes donde el triángulo se puede armar.
- JC: Como se puede apreciar, representa la cuarta parte del total del cuadrado. Q.e.d.
- C: Bellísimo. Aquí se ve cómo la geometría y la probabilidad, al igual que en el problema de la Aguja del Buffon interactúan como dos bailarines eximios.
- P: Perdón que los interrumpa, pero el espacio disponible se está acabando y quiero dejar asentada una queja.
- A, C, JC:¿...?
- P: En el cierre anterior prometieron que Arquímedes se tomaba vacaciones.
- I: Pero estuvimos hablando de Santaló no de Arquímedes.
- P: Yo seré el diseñador pero leo los artículos. Les cuento: Úrsula Molter lo menciona en su artículo cuando habla de estimación de pi, Juan Carlos hasta pide disculpas en la nota que acompaña al artículo de Mario Bunge, la Palanca de Agustín hace alarde del fulano, en los fractales, en el artículo de Carlos... ¡Paren un poco!
- JC: Tiene razón. Aunque no lo veamos, Arquímedes siempre está.
- C: En todo caso es una buena compañía para el maestro que homenajeamos.



En la clase, como en las sociedades bien organizadas, no hay que pretender que todos los alumnos lo sepan todo, sino que entre todos conozcan todo... La solución de problemas es el fin último de la materia que nos ocupa. Habría que acostumbrarse a preguntar a nuestros alumnos "¿Qué problemas te están interesando?" en lugar de "¿Qué estás estudiando de Matemática?".

DEMOSTRACIONES VISUALES

La suma de cubos es un cuadrado



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

EDUCANDO

EDITORIAL

Ciudad Universitaria Pabellón 2 Planta Baja, CP 1428, Cdad. Autónoma de Bs. As.
Tel: 4788-9570 mail: edcceducando@ciudad.com.ar